



# Diagnostic des défauts de réseaux électriques filaires par la réflectométrie

Mohamed Oumri

## ► To cite this version:

Mohamed Oumri. Diagnostic des défauts de réseaux électriques filaires par la réflectométrie. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112090 . tel-01165039

**HAL Id: tel-01165039**

**<https://theses.hal.science/tel-01165039>**

Submitted on 18 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologie de l'Information, des  
Télécommunications et des Systèmes

DISCIPLINE : Automatique

### THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 16 mai 2014

par

Mohamed OUMRI

<p>DIAGNOSTIC DE DÉFAUTS DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES FILAIRES PAR LA RÉFLECTOMÉTRIE</p>
---

Directeur de thèse : Qinghua ZHANG

Directeur de recherche à l'INRIA

**Composition du jury :**

*Rapporteurs :*

Philippe BESNIER  
Ahmed EL HAJJAJI

Directeur de recherche au CNRS-IETR  
Professeur à l'université de Picardie Jules Verne

*Examineurs :*

Lionel PICHON  
Odile PICON  
Michel SORINE

Directeur de recherche au CNRS-LGEP  
Professeur à l'université Paris-Est Marne la Vallée  
Directeur de recherche à l'INRIA



Science sans conscience n'est que ruine de l'âme.  
François Rabelais



# Remerciements

Ce travail s'est déroulé au sein de l'équipe *SISYPHE* de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), dans une ambiance très agréable grâce à la sympathie de chacun. Au moment où j'achève ce travail, je pense nostalgiquement aux longues journées de recherches que j'ai troquées, pour un temps, contre de longues soirées de rédaction. Mais, je pense avant tout à ceux qui m'ont soutenu et accompagné et je tiens à les remercier...

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus grande gratitude à mon directeur de thèse, monsieur Qinghua Zhang, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais servis de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de doctoral.

J'exprime toute ma reconnaissance à monsieur Michel Sorine de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche. Je tiens à le remercier pour ses précieux conseils et son aide permanente, au niveau intellectuel et humain.

Ma reconnaissance va également aux membres de jury de ma thèse : je remercie très sincèrement monsieur Philippe Besnier et monsieur Ahmed El Hajjaji d'avoir lu et examiné attentivement ce mémoire. La pertinence de leurs remarques m'a permis d'enrichir le contenu de ce tra-

vail. Je remercie également monsieur Lionel Pichon qui m'a fait l'honneur d'être le président du jury de ma thèse, ainsi qu'à madame Odile Picon qui a accepté d'examiner mes travaux de recherches.

Je remercie tous les anciens et actuels collègues à l'*INRIA* avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir : Filippo, Alexandre, Mohamed, Najmeddine, Abderraoûf et Arnaud. Je remercie particulièrement Martine Verneuille, assistante de l'équipe *SISYPHE* pour sa gentillesse et sa serviabilité.

Un grand merci tout particulier à Leïla Djaziri, avec qui j'ai partagé le bureau durant ma thèse, pour tous ses conseils bénéfiques, son soutien dans les moments difficiles et les discussions fructueuses.

J'ai une pensée particulière et émue pour Abdelmounim Meddah et Ibrahim Kherraki avec qui j'ai partagé des moments conviviaux depuis mes années de primaire. Je ne pourrais pas oublier tous mes amis à la résidence Jean Lory de Antony et à l'*UPJV* et mon beau frère Kader Leriouh avec qui j'ai passé d'agréables moments durant ma thèse.

Je remercie finalement ma famille, mes parents qui voient aujourd'hui leurs efforts et leurs sacrifices couronnés par ce mémoire de thèse. Mon éternel amour et mes affections totales vont à ma chère mère Fatima Oumri, qui a souhaité vivre pour longtemps juste pour voir ce que j'allais devenir et à mon père Abdelkader Oumri pour tout leur soutien, leur présence et leurs encouragements durant tout le long de mes études. Ils ont veillé à mon éducation avec infiniment d'amour et d'affection. Ma profonde reconnaissance va à mon frère Marwan et à mes surs Farah et Salma qui m'ont soutenu, m'ont encouragé sans cesse dont l'affection m'a rendu la vie vraiment plus agréable.

# Résumé

**Titre :** Diagnostic de défauts des réseaux électriques filaires par la réflectométrie.

Cette thèse s'intéresse au diagnostic de défauts de réseaux électriques filaires à l'aide de la réflectométrie. Pour concevoir des algorithmes de diagnostic, nous avons étudié le problème direct (simulations numériques de réseaux électriques) et le problème inverse (détermination de certaines propriétés d'un réseau à partir des mesures de réflectométrie). Concernant le problème direct, nous avons développé une méthode de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau sous forme d'arbre qui est basée sur la résolution successive d'équations différentielles de Riccati. Nous avons également généralisé l'équation de BLT pour des réseaux électriques composés de branches non uniformes et automatisé la méthode de sa résolution. La thèse a apporté deux nouveaux résultats concernant le problème inverse. Le premier résultat porte sur l'estimation du nombre, des longueurs et des coefficients de pertes des branches d'un réseau électrique sous forme d'étoiles via une méthode itérative. Le deuxième porte sur l'identification, au moins partiellement, des matrices d'admittance des branches d'un réseau électrique modélisé par l'équation de BLT. Les méthodologies et les algorithmes proposés dans la thèse sont validés soit par des simulations numériques, soit par des mesures réelles.

**Mots-clefs :** Réflectométrie, équations des télégraphistes, équations de Zakharov-Shabat, équation de BLT, équation des tensions, paramètres de scattering, problème direct, problème inverse, inverse scattering.



# Abstarct

**Title :** Fault diagnosis of wired electric networks by reflectometry.

This thesis focuses on fault diagnosis of wired electric networks using reflectometry. To develop diagnosis algorithms, we studied the direct problem (numerical simulations of electrical networks) and the inverse problem (determination of certain properties of a network from reflectometry measurements). For the direct problem, we developed a method for the computation of reflection coefficients of tree-shaped networks. This method consists in successively solving Riccati differential equations. We also generalized the BLT equation for non-uniform electric networks and automated its numerical solution. The thesis has made two new results concerning the inverse problem. The first result concerns the estimation of, the number, the lengths and the loss coefficients of the branches of a star-shaped network through an iterative method. The second focuses on the identification, at least partially, of the branches admittance matrices of an electric network modeled by the BLT equation. The methodologies and algorithms proposed in this thesis are validated either by numerical simulations or by real measurements.

**Keywords :** Reflectometry, telegrapher's equations, Zakharov-Shabat equations, BLT equation, voltages equation, scattering parameters, direct problem, inverse problem, inverse scattering.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Notations</b>	<b>xix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction au problème de la détection de défauts</b>	<b>5</b>
1.1 Détection des défauts de réseaux électriques . . . . .	6
1.1.1 Complexité des réseaux électriques . . . . .	6
1.1.2 Exemples de défauts des câbles électriques et leur diagnostic . . . . .	7
1.1.3 Principe de la réflectométrie . . . . .	11
1.2 Rappels sur les modèles d'une ligne de transmission . . . . .	13
1.2.1 Modèle de la ligne des télégraphistes . . . . .	13
1.2.2 Equations de Zakharov-Shabat (ZS) . . . . .	20
1.3 Modèles des réseaux électriques filaires . . . . .	24
1.3.1 Définitions et caractéristiques des réseaux électriques filaires . . . . .	25
1.3.2 Equations des télégraphistes des branches d'un réseau . . . . .	26
1.3.3 Equations de ZS des branches d'un réseau . . . . .	28
1.4 Performances actuelles de la détection des défauts . . . . .	28
1.4.1 Diagnostic des défauts non francs sur une ligne simple . . . . .	28
1.4.2 Diagnostic des défauts des réseaux électriques . . . . .	31
1.5 Diagnostic de pannes dans des systèmes dynamiques d'ordre fini . . . . .	33
1.5.1 Méthodes par génération et évaluation de résidus . . . . .	33
1.5.2 Méthodes par estimation de paramètres . . . . .	34
1.5.3 Méthodes par classification de données . . . . .	34
1.6 Introduction aux travaux réalisés . . . . .	34
1.6.1 Contributions dans le problème direct . . . . .	35
1.6.2 Contribution dans la résolution du problème inverse . . . . .	36
1.7 Conclusion . . . . .	37
<b>2 Équations de ZS et paramètres de scattering</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Équations de ZS et matrices caractéristiques d'une ligne . . . . .	40
2.2.1 Caractère bien posé des équations de ZS . . . . .	41
2.2.2 Matrices caractéristiques d'une ligne de transmission . . . . .	45
2.3 Coefficients de scattering via des EDOs . . . . .	48
2.3.1 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission . . . . .	49
2.3.2 Calcul des éléments de la matrice de scattering . . . . .	51
2.4 Conclusion . . . . .	52

<b>3</b>	<b>Modèle réduit pour les réseaux en arbre</b>	<b>53</b>
3.1	Problème direct pour des réseaux en arbre . . . . .	54
3.1.1	Calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile . . . . .	54
3.1.2	Calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en arbre . . . . .	57
3.2	Propriétés du coefficient de réflexion du réseau en étoile . . . . .	59
3.2.1	Coefficient de réflexion d'un réseau en étoile uniforme . . . . .	59
3.2.2	Coefficient de réflexion d'un réseau en étoile non uniforme . . . . .	60
3.3	Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion . . . . .	61
3.3.1	Description du simulateur numérique . . . . .	62
3.3.2	Comparaison des simulations avec les mesures . . . . .	62
3.3.3	Propriétés numériques du coefficient de réflexion . . . . .	64
3.4	Conclusion et perspectives . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Etude du problème inverse d'un réseau électrique étoile</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Admittance apparente au noeud central . . . . .	70
4.2.1	Expression explicite de l'admittance apparente . . . . .	70
4.3	Etude du problème inverse via l'admittance . . . . .	73
4.3.1	Etude de l'admittance au noeud central . . . . .	73
4.3.2	La relation "pulsation - longueur" . . . . .	75
4.3.3	Processus de la méthode itérative illustré sur un exemple . . . . .	81
4.4	Description de de la méthode itérative . . . . .	83
4.4.1	Calcul de l'admittance apparente au noeud central . . . . .	83
4.4.2	Estimation des longueurs et des coefficients de pertes . . . . .	84
4.4.3	Critère d'arrêt de la méthode itérative . . . . .	86
4.5	Exemples de simulations numériques . . . . .	88
4.5.1	Problème inverse sur un réseau électrique uniforme . . . . .	88
4.5.2	Problème inverse sur un réseau électrique non uniforme . . . . .	91
4.6	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Equation de <i>BLT</i> pour réseaux non uniformes</b>	<b>97</b>
5.1	Equations caractéristiques des branches et des noeuds . . . . .	98
5.1.1	Equations de scattering définies sur les branches . . . . .	98
5.1.2	Equations de diffusion définies sur les noeuds . . . . .	101
5.2	Equations caractéristiques du réseau . . . . .	103
5.2.1	Concaténation des équations de scattering . . . . .	103
5.2.2	Concaténation des équations de diffusion . . . . .	104
5.2.3	Equation de <i>BLT</i> non uniforme . . . . .	105
5.3	Méthodes de calcul numérique . . . . .	107
5.3.1	Matrices de scattering $S_{m-n}$ et vecteurs des sources $\iota_{m:n}$ . . . . .	107
5.3.2	Paramètres de diffusion définis aux noeuds . . . . .	107
5.4	Exemples de simulations numériques de l'équation de BLT . . . . .	111
5.4.1	Courants et tensions associés à un réseau contenant une boucle . . . . .	112
5.4.2	Comparaison des simulations avec des mesures . . . . .	113

5.5	Conclusion . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Problème inverse via la matrice d'admittance</b>	<b>119</b>
6.1	Formulation du problème inverse sur un exemple . . . . .	120
6.2	Principaux outils de l'étude du problème inverse . . . . .	123
6.2.1	Caractérisation des noeuds du réseau . . . . .	123
6.2.2	Equation des tensions . . . . .	125
6.2.3	Décomposition des matrices d'admittance . . . . .	126
6.3	Etude du problème inverse via l'équation des tensions . . . . .	127
6.3.1	Formulation du problème inverse sur un réseau quelconque . . . . .	128
6.3.2	Détermination de la matrice d'admittance du réseau à partir des expériences aux noeuds . . . . .	129
6.4	Simulations numériques du problème inverse . . . . .	130
6.4.1	Données de simulations numériques . . . . .	130
6.4.2	Analyse des résultats . . . . .	132
6.4.3	Robustesse de la méthode d'identification . . . . .	136
6.5	Conclusion . . . . .	137
	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>
	<b>Annexes</b>	<b>141</b>
A	Variantes des équations de Zakharov-Shabat . . . . .	141
A.1	Transformations des équations des télégraphistes aux équations de ZS . . . . .	141
A.2	Relation entre la fréquence $\omega$ et nombre d'onde $k$ . . . . .	142
B	Des équations ZS en $\omega$ aux équations ZS en $k$ . . . . .	144
C	D'autres notations concernées . . . . .	145
D	Admittance apparente et coefficient de réflexion d'une ligne uniforme	145
D.1	Admittance apparente . . . . .	146
D.2	Coefficient de réflexion . . . . .	147
E	Comportement asymptotique du coefficient de réflexion en haute fréquence . . . . .	149
F	EDOs vérifiées par les coefficients de la matrice de Scattering . . . . .	151
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>



# Table des figures

1	Exemple d'un réseau électrique $\mathcal{G}$ . . . . .	xxiii
1.1	Longueurs de câbles cumulées dans les transports (source : Cea List). . . . .	5
1.2	Câblage à l'arrière du race électrique d'un avion de transport en service (source : [88]). . . . .	6
1.3	Répartition des types de défauts rencontrés sur les câbles aéronautiques américains (source : [52]). . . . .	7
1.4	Trois types de défauts des câbles électriques (source : [52, 31]). . . . .	8
1.5	Principe de la réflectométrie sur un réseau en étoile. . . . .	11
1.6	TDR en injectant une impulsion dans une ligne de transmission simple (source : [75]). . . . .	12
1.7	Signal wobulé en fréquence pour une application FDR (source : [75]). . . . .	13
1.8	Élément infinitésimal d'une ligne de transmission. . . . .	14
1.9	Ligne de transmission connectée aux sources de tensions $v_l$ et $v_r$ . . . . .	15
1.10	Élément infinitésimal d'une ligne de transmission vu comme un quadripôle. . . . .	17
1.11	Phénomène d'atténuation (source : [72]). . . . .	20
1.12	Phénomène de dispersion (source : [72]). . . . .	20
1.13	Faisceau arborescent correspondant au câblage d'une voiture issu de l'interface du logiciel CRIPTE (source : [65]). . . . .	24
1.14	Notation des branches et des noeuds d'un réseau électrique. . . . .	25
1.15	Comparaison des performances de détection des défauts : (a) méthode TDR classique. (b) méthode JTFDR. (source : [84]). . . . .	29
1.16	Comparaison des potentiels $\tilde{q}_{\pm}$ calculées par l'IST et simulation directe des paramètres RLGC (source : [96]). . . . .	31
1.17	Comparaison des réflectogrammes mesuré et celui obtenu par inversion AG (source : [90]). . . . .	32
2.1	Description d'une ligne de transmission . . . . .	39
3.1	(a) Exemple d'un réseau électrique en arbre. (b) Exemple d'un réseau électrique en étoile. . . . .	53
3.2	Étapes de calcul du coefficient de réflexion. . . . .	56
3.3	Réseau électrique en arbre subdivisé en trois sous-réseaux en étoile. . . . .	57
3.4	Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé du réseau en étoile. . . . .	63
3.5	Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé du réseau en arbre. . . . .	63
3.6	Comparaison des réflectogrammes associés aux coefficients de réflexion mesuré et simulé du réseau en étoile. . . . .	64

3.7	Comparaison des réflectogrammes associés aux coefficients de réflexion mesuré et simulé du réseau en arbre. . . . .	65
3.8	Exemple d'un réseau électrique en étoile mono-filaire non uniforme. . . . .	65
3.9	Comparaison des coefficients de réflexion obtenus par le simulateur numérique et l'expression (3.25). . . . .	66
3.10	Profils des potentiels $q_{+m-n}$ et $q_{d_{m-n}}$ . . . . .	67
3.11	Coefficient de réflexion du réseau en étoile de la Figure 3.8. . . . .	68
4.1	Exemple d'un réseau électrique en $Y$ et son réflectogramme (Source : [8]). . . . .	69
4.2	Partie réelle de l'admittance $Y_{ap_{N_2}}$ . . . . .	73
4.3	Exemple de $\Re Y_{ap_{N_2}}$ définie sur $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$ (resp. $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ ) quand $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$ (resp. $\tilde{\rho}_{r,2-m} = -1$ ). . . . .	78
4.4	Processus de la méthode itérative sur un exemple. . . . .	81
4.5	Etapes principales de la méthode itérative. . . . .	83
4.6	Description du processus itératif. . . . .	87
4.7	Exemple d'un réseau électrique en étoile mono-filaire. . . . .	88
4.8	Exemple 1 : Longueurs $\hat{l}_{2-m}$ estimées des branches $B_{2-m}$ comparées aux longueurs simulées. . . . .	89
4.9	Exemple 1 : Coefficients de pertes $\hat{Q}_{2-m}$ calculés par la relation (4.49) comparés aux coefficients de pertes simulés. . . . .	90
4.10	Exemple 1 : Coefficients de pertes $\hat{Q}_{2-m}$ calculés par la relation (4.50) comparés aux coefficients de pertes simulés. . . . .	90
4.11	Exemple 2 : Longueurs $\hat{l}_{2-m}$ estimées des branches $B_{2-m}$ comparées aux longueurs simulées. . . . .	91
4.12	Exemple 2 : Coefficients de pertes $\hat{Q}_{2-m}$ calculés par la relation (4.49) comparés aux coefficients de pertes simulés. . . . .	92
4.13	Exemple 2 : Coefficients de pertes $\hat{Q}_{2-m}$ calculés par la relation (4.50) comparés aux coefficients de pertes simulés. . . . .	93
4.14	Profils des fonctions $\frac{R_{2-m}(z)}{L_{2-m}}$ et $\frac{G_{2-m}(z)}{C_{2-m}}$ . . . . .	93
4.15	Longueurs $\hat{l}_{2-m}$ estimées des branches $B_{2-m}$ comparées aux longueurs simulées. . . . .	94
4.16	Coefficients de pertes estimés des branches $B_{2-m}$ comparés aux coefficients simulés. . . . .	94
5.1	Exemple d'un réseau électrique contenant une maille . . . . .	97
5.2	Modules et phases de la tension $V_{2,3}$ simulés au noeud $N_2$ . . . . .	112
5.3	Modules des courants électriques simulés aux extrémités de $B_{3-4}$ . . . . .	113
5.4	Modules des tensions simulés aux extrémités de $B_{3-4}$ . . . . .	114
5.5	Graphe représentant un un exemple d'un réseau électrique en arbre. . . . .	114
5.6	Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé au noeud $N_1$ . . . . .	115
5.7	Comparaison de la tension mesuré et simulé au noeud $N_1$ . . . . .	115
5.8	Comparaison du courant mesuré et simulé au noeud $N_1$ . . . . .	116

6.1	Exemple d'un réseau électrique en $Y$ .	119
6.2	La matrice de scattering globale du réseau de la Figure 6.1.	122
6.3	Exemple d'un réseau électrique.	130
6.4	Profils des inductances $L_{m-n}$ des branches $B_{m-n}$ non homogènes	131
6.5	Comparaison des modules des éléments de $Y_{1-2}$ simulés et identifiés	132
6.6	Profils des éléments des matrices d'admittance associées aux $B_{2-3}$ et $B_{3-4}$ .	133
6.7	Profils des éléments $y_{n:m,n}$ de la matrice $Y_{4-5}$ .	134
6.8	Comparaison entre les éléments simulés de la diagonale de la matrice $Y_{4-5}$	134
6.9	Profils simulés et identifiés des modules et phase de $\zeta_{1-2}$ et $\gamma_{1-2}$ .	135
6.10	Module et phase du coefficient de réflexion associé à la branche $B_{4-5}$ au noeud $N_4$ .	136
6.11	Comparaison des modules et phases des éléments de $Y_{4-5}$ simulés et identifiés avec $\tau = 0.05$ .	137
6.12	Comparaison des modules et phases de l'éléments $y_{3:2,3}$ simulé et identifiés avec des niveaux de bruit différents.	138
13	Ligne de transmission connectée à une source de tensions $V_l$ et deux impédances de charges $Z_l$ et $Z_r$ .	145





# Liste des tableaux

1	Nomenclatures associées à la ligne de transmission . . . . .	xix
2	Nomenclatures associées aux noeuds du réseau $\mathcal{G}$ . . . . .	xx
3	Nomenclatures associées aux branches du réseau $\mathcal{G}$ . . . . .	xxi
4	Nomenclatures associées aux réseaux des câbles électriques . . . . .	xxii
1.1	Avantage et inconvénients des méthodes existantes pour la détection de défauts. . . . .	10
3.1	Caractéristiques des terminaisons des branches . . . . .	66
4.1	Nature des extremums de la fonction $\Re Y_{ap_{2-m}}$ associés aux $\omega_{2-m}^k$ . . . . .	76
5.1	Caractéristiques des branches du réseau de la Figure 5.1. . . . .	112
6.1	Caractéristiques des branches du réseau de la Figure 6.3. . . . .	131



# Notations

## Nomenclatures associées aux lignes des télégraphistes

TABLE 1 – Nomenclatures associées à la ligne de transmission

Nomenclatures	Définitions
$R, L, G, C$	résistance, inductance, conductance, capacité par unité de longueur
$z_l, z_r$	extrémités gauche et droite de la ligne
$v, i$	tension et courant électrique dans le domaine temporel
$v_r, v_l$	tensions de la source aux extrémités $z_r$ et $z_l$
$\mathcal{Z}_r, \mathcal{Z}_l$	réponses impulsionnelles tension-courant aux extrémités $z_r$ et $z_l$
$V, I$	tension et courant électrique dans le domaine fréquentiel
$V_r, I_l$	amplitudes des tensions $v_r$ et $v_l$
$Z_r, Z_l$	transformées de Fourier inverses des $\mathcal{Z}_r$ et $\mathcal{Z}_l$
$\nu_1, \nu_2$	ondes incidente et réfléchie définies sur la ligne
$\ell$	longueur géométrique de la ligne
$l$	longueur en distance électrique de la ligne
$\zeta$	impédance caractéristique de la ligne
$\zeta_\infty$	impédance caractéristique en haute fréquence
$Y_c$	admittance caractéristique de la ligne
$Y_\infty$	admittance caractéristique en haute fréquence
$Z_L := R + j\omega L$	impédance longitudinale de la ligne
$Y_T := G + j\omega C$	admittance transversale de la ligne
$Z_{ap}$	impédance apparente de la ligne
$Y_{ap}$	admittance apparente de la ligne
$\gamma$	exposant de propagation de la ligne
$\alpha$	coefficient d'atténuation de la ligne
$\beta$	coefficient de phase ou de dispersion de la ligne
$c_0$	vitesse de propagation de la ligne
$Z$	matrice d'impédance de la ligne
$Y$	matrice d'admittance de la ligne
$S$	matrice de scattering de la ligne
$\Phi$	matrice de transition d'état associée à la ligne
$r_l, t_l$	coefficients de réflexion et de transmission à gauche
$r_r, t_r$	coefficients de réflexion et de transmission à droite

**Remarque 1.** Nous indexons les paramètres associées aux extrémités gauche et droite respectivement par  $l$  et  $r$ .

## Nomenclatures associées aux réseaux électriques

Nous notons par  $\mathcal{G}$  le réseau électrique décrit dans la section 1.3. Nous distinguons deux types de réseaux particuliers :

- Réseau électrique en étoile  $\mathcal{S}$ .
- Réseau électrique en arbre  $\mathcal{T}$ .

## Nomenclatures associées aux noeuds d'un réseau

TABLE 2 – Nomenclatures associées aux noeuds du réseau  $\mathcal{G}$

Nomenclatures	Définitions
$N_i$	$i^{\text{ème}}$ noeud du réseau $\mathcal{G}$
$N_0$	noeud représentant le plan de masse
$\#N(\mathcal{G})$	nombre total des noeuds du réseau $\mathcal{G}$
$\mathcal{E}$	ensemble des indices des noeuds du réseau $\mathcal{G}$
$\mathcal{E}^\circ$	ensemble des indices des noeuds terminaux du réseau $\mathcal{G}$
$\mathcal{E}^\star$	ensemble des indices des noeuds intermédiaires du réseau $\mathcal{G}$
$\mathcal{C}_m$	ensemble des indices des noeuds voisins au noeud $N_m$
$\#\mathcal{C}_m$	nombre de branches connectées au noeud $N_m$
$V_{s,m}$	tension de la source connectée au noeud $N_m$
$Z_{s,m}$	impédance connectée au noeud $N_m$
$V_{m,0}$	tension au noeud $N_m$
$I_{m,0}$	courant sortant du noeud $N_m$ vers le noeud $N_0$
$a_{m,0}$	onde sortante du noeud $N_m$
$b_{m,0}$	onde entrante dans le noeud $N_m$
$I_m$	vecteur des courants entants dans le noeud $N_m$
$a_m$	vecteur des ondes sortantes du noeud $N_m$
$b_m$	vecteur des ondes entantes dans le noeud $N_m$
$D_m$	coefficient de diffusion au noeud $N_m$
$\zeta_{\mathcal{C}_m}$	matrice diagonale des $\zeta_{\infty_{m-n}}$ pour tout $n \in \mathcal{C}_m$

**Remarque 2.** Nous réservons l'indice 0 pour le noeud qui représente le plan de masse. Donc, les indices des noeuds du réseau sont supérieur à 0.

## Nomenclatures associées aux branches d'un réseau

TABLE 3 – Nomenclatures associées aux branches du réseau  $\mathcal{G}$

Nomenclatures	Définitions
$B_{m-n}$	branche du réseau $\mathcal{G}$ délimitée par $N_m$ et $N_n$
$\#B(\mathcal{G})$	nombre total des branches du réseau $\mathcal{G}$
$\mathcal{B}$	ensemble des indices m-n des branches du réseau $\mathcal{G}$
$I_{m,n}$	courant entrant dans la branche $B_{m-n}$ par $N_m$
$V_{m,n}$	tension le long d'une branche $B_{m-n}$
$\nu_{m,n}$	onde de puissance sortante de la branche $B_{m-n}$ par $N_m$
$a_{m,n}$	onde entrante dans la branche $B_{m-n}$ par $N_m$
$b_{m,n}$	onde sortante de la branche $B_{m-n}$ par $N_m$
$\zeta_{m-n}$	impédance caractéristique de la branche $B_{m-n}$
$\zeta_{\infty m-n}$	impédance caractéristique en haute fréquence de $B_{m-n}$
$Y_{c_{m-n}}$	admittance caractéristique de la branche $B_{m-n}$
$Y_{\infty m-n}$	admittance caractéristique en haute fréquence de $B_{m-n}$
$\gamma_{m-n}$	exposant de propagation de la branche $B_{m-n}$
$Z_{ap_{m-n}}$	impédance apparente de la branche $B_{m-n}$
$Y_{ap_{m-n}}$	admittance apparente de la branche $B_{m-n}$
$Y_{m-n}$	matrice d'admittance de la branche $B_{m-n}$
$Z_{m-n}$	matrice d'impédance de la branche $B_{m-n}$
$S_{m-n}$	matrice de scattering de la branche $B_{m-n}$
$\zeta_{m:n}$	matrice diagonale contenant $\zeta_{m-n}$ aux extrémités de $B_{m-n}$

**Remarque 3.** Nous indexons chaque paramètre associé à la branche  $B_{m-n}$  et indépendamment de l'orientation de la branche par  $m-n$ . En excluant l'onde  $b_{m,n}$ , les ondes qui se propagent d'un noeud  $N_m$  vers un noeud  $N_n$  sont indexées par  $(m,n)$ . Par défaut, cette notation signifie que le paramètre indexé par  $(m,n)$  est évalué au noeud  $N_m$ .

Les indices des branches du réseau sont rangés dans l'ensemble  $\mathcal{B}$  tels que :

$$\mathcal{B} = \{m-n \text{ pour } 1 \leq m \leq \#N(\mathcal{G}) \text{ et } n > m\}$$

## Nomenclatures associées aux réseaux des câbles électriques

**Matrices de connectivité :** Nous allons utiliser trois matrices caractéristiques d'un réseau électrique  $\mathcal{G}$  qui sont introduites dans les travaux de *Baum-Liu-Tesche* [13] et elles sont connues dans la théorie des graphes sous d'autres noms.

- $C_{N.N}$  : matrice de connectivité du réseau de type Noeud-Noeud. Ses éléments  $(C_{N.N})_{m,n}$ , pour  $m, n \in \mathcal{E}$ , sont définis par :

$$(C_{N.N})_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si les noeuds } N_m \text{ et } N_n \text{ partagent la branche } B_{m-n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $C_{N.I}$  : matrice de connectivité du réseau de type Noeud-Courant. Chaque élément  $(C_{N.I})_{l,(m,n)}$  caractérise la connexion du noeud  $N_l$  et le courant  $I_{m,n}$ . Il est défini par :

$$(C_{N.I})_{l,(m,n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $C_{w.w}$  : matrice de connectivité du réseau de type onde-onde (en anglais wave-wave). Chaque élément de cette matrice est donné par :

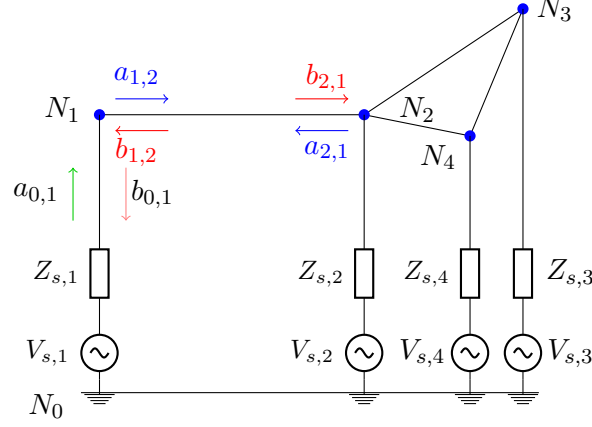
$$(C_{w.w})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si les ondes } (b_{\mathcal{B}})_i \text{ et } (a_{\mathcal{B}})_j \text{ sont évalués en même noeud} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $(b_{\mathcal{B}})_i$  et  $(a_{\mathcal{B}})_j$  représentent respectivement la  $i^{\text{ème}}$  et la  $j^{\text{ème}}$  composante des supers-vecteurs  $b_{\mathcal{B}}$  et  $a_{\mathcal{B}}$ .

TABLE 4 – Nomenclatures associées aux réseaux des câbles électriques

Nomenclatures	Définitions
$C_{N.N}$	matrice connectivité du réseau de type noeud-noeud
$C_{N.I}$	matrice connectivité du réseau de type courant-noeud
$C_{w.w}$	matrice connectivité du réseau de type onde-onde
$I_{\mathcal{E}}$	super-vecteur des courants aux extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$V_{\mathcal{E}}$	super-vecteur des tensions aux extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$a_{\mathcal{E}}$	super-vecteur des ondes sortantes des extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$b_{\mathcal{E}}$	super-vecteur des ondes entrantes dans les extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$Z_{\mathcal{E}}$	matrice d'impédance du réseau $\mathcal{G}$
$Y_{\mathcal{E}}$	matrice d'admittance du réseau $\mathcal{G}$
$S_{\mathcal{E}}$	matrice de scattering du réseau $\mathcal{G}$
$I_{\mathcal{B}}$	super-vecteur des courants aux extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$V_{\mathcal{B}}$	super-vecteur des tensions aux extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$a_{\mathcal{B}}$	super-vecteur des ondes sortantes des extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$b_{\mathcal{B}}$	super-vecteur des ondes entrantes dans les extrémités des branches du $\mathcal{G}$
$Z_{\mathcal{B}}$	super-matrice d'impédance du réseau $\mathcal{G}$
$Y_{\mathcal{B}}$	super-matrice d'admittance du réseau $\mathcal{G}$
$S_{\mathcal{B}}$	super-matrice de scattering du réseau $\mathcal{G}$
$D_{\mathcal{B}}$	super-matrice de diffusion du réseau $\mathcal{G}$
$Z_{s,\mathcal{E}}$	matrice diagonale des impédances connectées aux noeuds
$V_{s,\mathcal{E}}$	vecteur contenant les tensions des sources connectées aux noeuds

## Exemple de notations

FIGURE 1 – Exemple d'un réseau électrique  $\mathcal{G}$ 

Considérons le réseau électrique de la Figure 1. Nous avons,

- $\#N(\mathcal{G}) = 4$  : le nombre total des noeuds.
- $\#N(\mathcal{G}) = 4$  : le nombre total des branches.
- $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$  : ensemble des indices des noeuds.
- $\mathcal{E}^* = \{2, 3, 4\}$  : ensemble des noeuds intermédiaires.
- $\mathcal{E}^\circ = \{1\}$  : ensemble des noeuds terminaux.
- $\mathcal{C}_1 = \{2\}$  : ensemble des indices des noeuds voisins au noeud  $N_1$ .
- $\mathcal{C}_2 = \{1, 3, 4\}$  : ensemble des indices des noeuds voisins au noeud  $N_2$ .
- $\mathcal{C}_3 = \{2, 4\}$  : ensemble des indices des noeuds voisins au noeud  $N_3$ .
- $\mathcal{C}_4 = \{2, 3\}$  : ensemble des indices des noeuds voisins au noeud  $N_4$ .
- Sur l'ensemble des branches du réseau, nous définissons les supers-vecteurs des ondes de puissance, des courants et des tensions suivantes :

$$a_{\mathcal{B}} = [a_{1,2} \ a_{2,1} \ a_{2,3} \ a_{3,2} \ a_{2,4} \ a_{4,2} \ a_{3,4} \ a_{4,3}]^T$$

$$b_{\mathcal{B}} = [b_{1,2} \ b_{2,1} \ b_{2,3} \ b_{3,2} \ b_{2,4} \ b_{4,2} \ b_{3,4} \ b_{4,3}]^T$$

$$I_{\mathcal{B}} = [I_{1,2} \ I_{2,1} \ I_{2,3} \ I_{3,2} \ I_{2,4} \ I_{4,2} \ I_{3,4} \ I_{4,3}]^T$$

$$V_{\mathcal{B}} = [V_{1,2} \ V_{2,1} \ V_{2,3} \ V_{3,2} \ V_{2,4} \ V_{4,2} \ V_{3,4} \ V_{4,3}]^T$$

- Sur les noeuds, nous définissons la matrice diagonale des impédance  $Z_{s,\mathcal{E}}$  et le vecteur des tensions sources aux noeuds suivante :

$$Z_{s,\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} Z_{s,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{s,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{s,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{s,4} \end{bmatrix}, \quad V_{s,\mathcal{E}} = [V_{s,1} \ V_{s,2} \ V_{s,3} \ V_{s,4}]^T$$



- Les matrices de connectivité sont données comme suite :
- La matrice  $C_{N,N}$  :

$$C_{N,N} = \begin{matrix} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

- La matrice  $C_{N,I}$  :

$$C_{N,I} = \begin{matrix} & I_{1,2} & I_{2,1} & I_{2,3} & I_{3,2} & I_{2,4} & I_{4,2} & I_{3,4} & I_{4,3} \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

- La matrice  $C_{w,w}$  :

$$C_{w,w} = \begin{matrix} & a_{1,2} & a_{2,1} & a_{2,3} & a_{3,2} & a_{2,4} & a_{4,2} & a_{3,4} & a_{4,3} \\ \begin{matrix} b_{1,2} \\ b_{2,1} \\ b_{2,3} \\ b_{3,2} \\ b_{2,4} \\ b_{4,2} \\ b_{3,4} \\ b_{4,3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

# Introduction

Les progrès technologiques modernes apportent incontestablement à notre société plus de confort de vie et plus de productivité, mais aussi des sources d'ennuis, voire de dangers, conséquences des défaillances techniques d'équipements ou d'installations dont la sûreté est plus ou moins critique. Si le besoin d'augmenter la fiabilité technologique a été compris depuis longtemps pour les secteurs tels que l'aviation et l'énergie nucléaire, il est aussi de plus en plus reconnu par les industriels de produits de consommation, pour améliorer leur compétitivité.

Avec des systèmes d'ingénierie de plus en plus complexes, il est nécessaire de développer des techniques de diagnostic adéquates pour leur maintenance. Beaucoup de travaux de recherche sont donc consacrés au diagnostic de pannes depuis plusieurs décennies, dont on peut citer quelques ouvrages [11, 43, 23, 35, 48, 52, 15, 85] parmi une très vaste littérature. Pour les systèmes équipés de composants électriques et électroniques, le diagnostic de défauts dans ces composants est déjà une fonctionnalité intégrée relativement répandue, de l'aviation à l'automobile, même les appareils électroniques pour le grand public. Par contre, les câbles électriques assurant la connexion de ces composants ont été longtemps négligés par les dispositifs de diagnostic. Il est vrai que des conducteurs métalliques entourés d'isolant sont moins sujets à des défaillances que les composants beaucoup plus sophistiqués, mais avec la multiplication de composants électriques ou électroniques dans les systèmes d'ingénierie moderne, la quantité de câbles électriques augmente de telle manière que ce risque ne peut plus être négligé. Par exemple, les longueurs cumulées de câbles atteignent 4 km dans une voiture moderne, 12 km dans un bus, 200 km dans un TGV.

Les recherches sur le diagnostic de défauts dans des câbles et des réseaux filaires sont développées depuis une dizaine d'années, comme en témoignent les publications récentes dans ce domaines [107, 104, 45, 92, 8, 93, 39, 40]. La plupart de ces résultats portent sur les *défauts francs*, entraînant de fortes discontinuité d'impédance, notamment le circuit ouvert ou le court circuit, et rendant les composants connectés inopératoires. Les quelques résultats sur les défauts non francs sont plutôt sur des câbles isolés que sur des réseaux [112, 96].

Pour augmenter la fiabilité des systèmes connectés par des réseaux filaires, il est important de développer des méthodes de diagnostic de défauts *non francs* dans un réseau, qui sont souvent les signes précurseurs de défauts francs, afin d'effectuer la maintenance quand il le faut, pour éviter une défaillance sévère. Ceci constitue l'objectif principal de cette thèse. Afin de contribuer dans cette direction, nous avons d'abord étudié la modélisation de réseaux filaires électriques, le diagnostic d'un réseau simple sous forme d'étoile, avant d'étudier le diagnostic de défauts non francs dans les réseaux de structure topologique générale.

Ce manuscrit de thèse est composé de 6 chapitres :

**Chapitre 1 :** Dans le premier chapitre, nous introduisons la problématique industrielle pour le diagnostic de défauts dans les réseaux électriques, la modélisation des lignes de transmission et de réseaux électriques filaires complexes.

Le diagnostic de défauts dans un réseau électrique peut être vu comme la résolution d'un problème inverse, c'est-à-dire, à partir de certaines mesures (paramètres de scattering ou courants-tensions), on cherche à remonter aux caractéristiques du réseau.

La principale technique de diagnostic de défauts de réseaux électriques, utilisée en pratique et étudiée dans cette thèse, est la réflectométrie. Après la modélisation de réseaux électriques par les équations des télégraphistes et les lois de Kirchhoff, nous présentons les performances actuelles des méthodes de diagnostic connues, ainsi que les tâches réalisées dans cette thèse.

**Chapitre 2 :** Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la ligne de transmission simple. Nous allons étudier le caractère bien posé des équations de Zakharov-Shabat et nous introduisons les paramètres de scattering. Dans ce chapitre, nous introduisons également l'ensemble des équations et les principes qui seront généralisés pour les branches des réseaux électriques dans les chapitres 5 et 6.

**Chapitre 3 :** Dans le chapitre 3, nous présentons un modèle réduit de la réflectométrie qui caractérise les réseaux électriques en arbre avec les paramètres linéiques *RLGC* des branches. Nous présentons une méthode de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en arbre qui est basée sur la résolution des équations différentielles de Riccati.

Cette méthode a été validée par une comparaison des coefficients de réflexion simulés et mesurés.

**Chapitre 4 :** Dans le quatrième chapitre, nous nous restreindrons aux réseaux électriques en étoile pour étudier le problème inverse dont l'objectif est d'estimer le nombre, les longueurs et les coefficients de pertes des branches du réseau.

Afin d'atteindre notre objectif, nous allons développer une méthode itérative basée sur l'exploitation de l'admittance du réseau en étoile au noeud central définie en fonction des admittances des branches. Cette méthode d'inversion a été validée par des simulations numériques.

**Chapitre 5 :** Le chapitre cinq porte sur la généralisation de l'équation de *BLT* aux réseaux électriques composés de branches non uniformes. Pour formuler cette équation, les matrices caractéristiques des branches et des noeuds du réseau doivent être auparavant calculées. Nous allons présenter une méthode entièrement automatisée pour le calcul de ces matrices caractéristiques à partir des spécifications de la structure topologique du réseau et des paramètres

caractéristiques non uniformes des branches.

Comme dans le chapitre 3, nous validons cette méthode par des simulations numériques et par une comparaison des coefficients de réflexion simulés et mesurés.

**Chapitre 6 :** Le sixième chapitre est dédié à l'étude d'un problème inverse des réseaux électriques de structure topologique générale via la matrice d'admittance. Nous allons utiliser *l'équation des tensions* qui exprime les tensions aux noeuds du réseau en fonction des caractéristiques des branches et des noeuds. Cette équation est similaire à l'équation de BLT étudiée dans le précédent chapitre.

L'objectif de cette étude est d'identifier, au moins partiellement, la matrice d'admittance de chaque branche du réseau à partir de la matrice d'admittance globale du réseau, qui peut être déduite d'un certain nombre d'expériences faites aux noeuds. Cette méthode a été testée par des simulations numériques.



# Introduction au problème de la détection de défauts dans les réseaux électriques et plan de la thèse

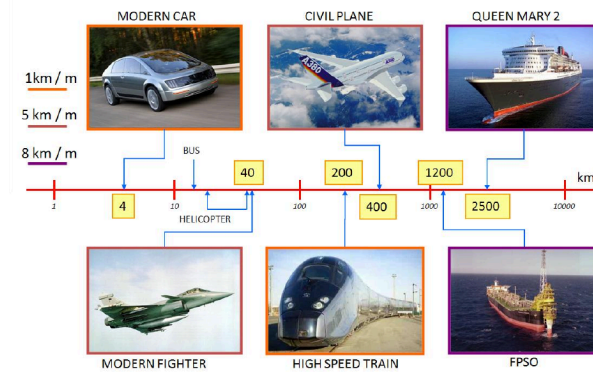


FIGURE 1.1 – Longueurs de câbles cumulées dans les transports (source : Cea List).

Un réseau électrique filaire est un ensemble d'entités interconnectées entre elles par des câbles électriques qui sont des vecteurs de l'alimentation et de l'information pour les systèmes communicants. Nous distinguons deux types de structures de réseaux électriques : structure arborescente, structure maillée. Chaque type de structure possède des spécificités et des modes d'exploitation très différents. En effet, au niveau des grands réseaux d'énergie (les réseaux d'EDF), on utilise la structure maillée pour les réseaux de transport ou les réseaux de répartition et la structure arborescente pour les réseaux de distribution. Nous rencontrons également certaines de ces structures dans les réseaux informatiques et les réseaux des lignes téléphoniques. Dans le contexte de cette thèse, nous nous intéressons aux réseaux électriques embarqués dans des systèmes d'ingénierie qui ont principalement une structure arborescente. En particulier, les faisceaux des lignes électriques utilisées dans le domaine de l'automobile et de l'aéronautique. Néanmoins, nous nous intéressons aussi à des réseaux de structure maillée dans cette thèse.

Depuis une dizaine d'années, les industries de l'automobile, de l'aéronautique et du

transport de l'énergie s'intéressent beaucoup au développement des méthodes de détection de défauts dans les réseaux de câbles électriques. Dans ce chapitre, après une introduction sur le sujet de la détection de défauts des câbles électriques, nous présentons les modèles de lignes de transmission simples et de réseaux électriques. Différents outils ou méthodes proposés pour le diagnostic des défauts sont présentés, en mettant en avant leurs avantages et leurs inconvénients.

## 1.1 Détection des défauts dans des réseaux électriques dans l'industrie



FIGURE 1.2 – Câblage à l'arrière du race électrique d'un avion de transport en service (source : [88]).

### 1.1.1 Complexité des réseaux électriques

Pendant ces trente dernières années, la longueur cumulée des câbles embarqués sur une automobile a plus que décuplé, passant de près de 200 à plus de 4000 mètres, et en même temps, le nombre de connecteurs est passé de deux cents à plus de deux mille. Dans le transport public, la longueur des câbles dans un bus et un TGV atteint en moyenne respectivement 12km et 200km (Figure 1.1). Ce phénomène est aussi présent dans l'aviation, où les longueurs de câbles dépassent plusieurs centaines de kilomètres dans les avions modernes (près de 40 km pour le Rafale et de 400 km pour l'Airbus A380), domaine où la fiabilité est un enjeu vital. Nous comprenons donc que le réseau des câbles électriques filaires soit aujourd'hui considéré par les

constructeurs comme un maillon faible pour les véhicules modernes.

De grandes longueurs de câbles sont aussi rencontrées dans le domaine des télécommunications. Même si cette application n'a pas une connotation de sûreté, la qualité de service est un enjeu des plus importants, surtout dans le contexte actuel de généralisation de l'accès à l'Internet haut débit à domicile et ses extensions prévisibles dans le futur. De plus, la connaissance à tout moment de l'état de santé du réseau filaire téléphonique et la détection d'anomalies au plus tôt sont des enjeux primordiaux dans un contexte concurrentiel.

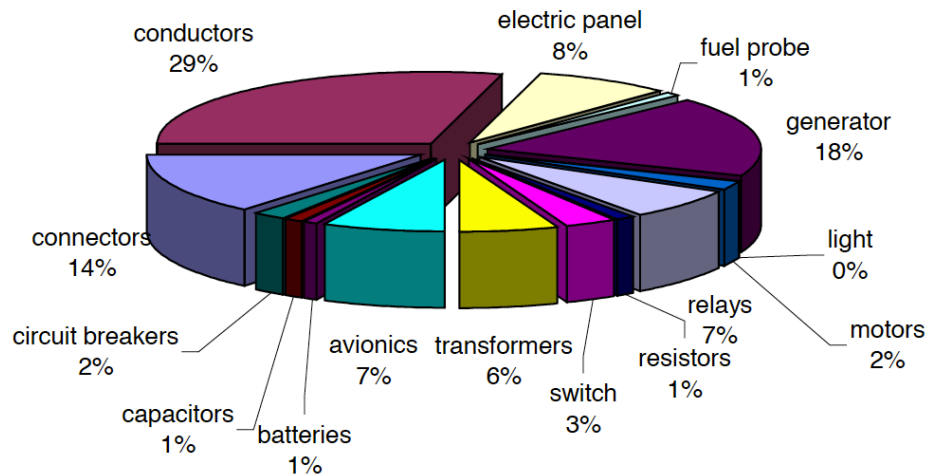


FIGURE 1.3 – Répartition des types de défauts rencontrés sur les câbles aéronautiques américains (source : [52]).

### 1.1.2 Exemples de défauts des câbles électriques et leur diagnostic

Les défauts des câbles électriques, rencontrés dans l'industrie, sont de plusieurs types et ils ont une influence sur le transport d'énergie ou la transmission de signaux. Ces défauts peuvent causer la détérioration des équipements électroniques connectés sur le réseau de câbles à cause de la surtension, la perte du signal électrique, la mise hors tension d'un système complet, l'apparition de fumée, d'incendies ou parfois même d'explosions. Chaque méthode de diagnostic ne peut pas être utilisée pour tous les types de défauts.

#### 1.1.2.1 Exemples de défauts de câbles

Dans la Figure 1.3 qui représente la répartition des types de défauts rencontrés sur les câbles aéronautiques américains [52], nous distinguons des défauts francs et des défauts non francs (ou *hard faults/soft faults* en anglais).

**Défauts francs :** Les défauts francs sont des défauts sévères. Ils entraînent des pannes des systèmes électriques. Nous citons par exemple les courts circuits et les





(a) Défaut mécanique



(b) Défaut chimique



(c) Défaut thermique

FIGURE 1.4 – Trois types de défauts des câbles électriques (source : [52, 31]).

circuits ouverts.

**Défauts non francs :** Les défauts non francs modifient modérément les caractéristiques internes des câbles et ils peuvent s'évoluer vers des défauts francs. Nous citons par exemple les défauts d'éraflure des câbles et les défauts qui sont dus au vieillissement de câbles.

Ces défauts électriques sont conséquences de plusieurs facteurs externes ou internes. Parmi les défauts d'origine externe, nous trouvons,

- Défauts de montage (erreurs humaines, ...).
- Corrosion, oxydation (humidité, produits chimiques, ...).
- Effets de l'environnement (température, ensoleillement, ...).

Les défauts d'origine interne représentent principalement les défauts non francs qui sont liés au vieillissement et aux défauts de fabrication.

Dans la Figure 1.4, nous avons trois exemples de défauts rencontrés dans les câbles électriques. Les défauts mécaniques sont généralement des défauts francs. Cependant, les défauts chimiques et thermiques apparaissent dans les câbles électriques comme des défauts non francs et ils évoluent vers des défauts francs.

Devant cette complexité des réseaux de câbles électriques dans les domaines de l'automobile et de l'aéronautique, il est important pour les constructeurs de maîtriser les technologies de diagnostic de défauts dans les réseaux filaires. Le besoin de développer des dispositifs de diagnostic (détection, localisation et caractérisation) des défauts est visé par plusieurs projets de recherche sur le diagnostic de câblage en fiabilisant les véhicules pendant ou après leur conception. En effet, depuis 2006, plusieurs projets de recherche ont été lancés en France par l'ANR (Agence Nationale de Recherche) pour le diagnostic filaire. Parmi ces projets, nous citons,

- SEEDS (Smart Embedded Electronic Diagnosis System - ANR 2006/2009) : Il a réussi à prouver la faisabilité d'un système de diagnostic de câbles électriques avec une précision de localisation de l'ordre de 10 cm pour des défauts francs.
- O-DETECT (Outil de Diagnostic Embarqué de Faisceaux AUTomobiles - ANR 2009/2012) : Il a été lancé pour étudier et mettre en oeuvre de nouvelles méthodes plus adaptées à la problématique de l'embarqué.
- INSCAN (INfrastructure Safety Cable ANalysis - ANR 2009/2012) : Son objectif est de développer une nouvelle méthode de diagnostic pour détecter les défauts d'isolement.

Les défauts évoqués précédemment ont chacun leurs particularités, c'est pour cette raison qu'il existe diverses méthodes de diagnostic des défauts<sup>1</sup> qui se différencient par leurs principes de mesures, les types de signaux utilisés et la nature du défaut que l'on désire diagnostiquer.

Parmi les méthodes classiques de diagnostic filaires, nous citons les méthodes suivantes :

**Inspection visuelle :** Cette méthode est la plus utilisée pour localiser des anomalies sur les réseaux filaires. Elle est utilisée souvent pour repérer les échauffements locaux des câbles, les dégradations des isolants [31].

**Méthode par rayon X :** Cette méthode permet de trouver des défauts au niveau des conducteurs situés à l'intérieur des câbles électriques comme à l'extérieur au niveau des isolants. Lors de l'utilisation de cette méthode, le générateur de rayons X et le détecteur doivent être positionnés près des câbles du réseau.

**Impédance spectroscopie :** Le spectroscopie d'impédance est une méthode haute fréquence qui permet de connaître l'état d'un câble électrique en analysant les caractéristiques de son isolant dans une plage de fréquence [82]. Le principe de cette méthode est de mesurer l'impédance du câble en faisant varier la fréquence de l'onde injectée et de comparer les données enregistrées à celles préalablement mesurées sur un câble sain identique à celui sous test.

**Méthode capacitive et inductive :** Cette méthode est utilisée pour déterminer la longueur d'un câble quand son extrémité est en circuit ouvert ou en court-

---

1. Toutes les méthodes de diagnostic ne peuvent pas être utilisées pour détecter les défauts dans tous les types des réseaux de câbles électriques parce que nous distinguons le diagnostic des défauts des réseaux de câbles embarqués et non embarqués dans les systèmes électriques.

circuit. Elle est basée sur la mesure de la capacité dans le cas d'un circuit ouvert ou de l'inductance du câble dans le cas d'un court-circuit [27].

TABLE 1.1 – Avantage et inconvénients des méthodes existantes pour la détection de défauts.

Méthodes	Avantage	Inconvénient
<b>Inspection visuelle</b>	Elle peut détecter le défaut sans mesures	Limitée à la recherche des défauts visibles de l'extérieur, elle ne peut pas être utilisée quand les câbles sont regroupés, blindés ou dans des zones difficiles à atteindre.
<b>Méthode par rayons X</b>	Elle permet de connaître l'état de la face extérieure du câble (l'isolant) et des conducteurs.	Coûteuse, applicable uniquement pour les câbles dont l'accès est facile.
<b>Impédance spectroscopie</b>	Elle permet de connaître l'état d'un câble électrique en analysant les caractéristiques de son isolant.	Le câble doit être isolé de tout autre système. Ne peut être utilisable pour une application embarquée.
<b>Méthode capacitive et inductive</b>	Elle est simple, peu encombrante et peu chère.	Diagnostic des câbles simples. Elle n'est pas adaptée pour les réseaux complexes, et si le câble en fonctionnement.

Dans le Tableau 1.1, nous résumons les avantages et les inconvénients des méthodes de diagnostic filaire présentées précédemment.

**Méthode de la réflectométrie :** A l'heure actuelle, la méthode la plus souvent utilisée pour le diagnostic des défauts des réseaux électriques est *la méthode de la réflectométrie* qui est une méthode haute fréquences de diagnostic. Elle est basée sur le principe du radar qui consiste à envoyer un signal dans le système ou dans le milieu à diagnostiquer et à étudier le signal réfléchi. Cette méthode

est aussi utilisée dans d'autres domaines que les réseaux de câbles électriques, tels que la géotéchnologie [86], le génie civil [55] et le test des matériaux [68].

### 1.1.3 Principe de la réflectométrie

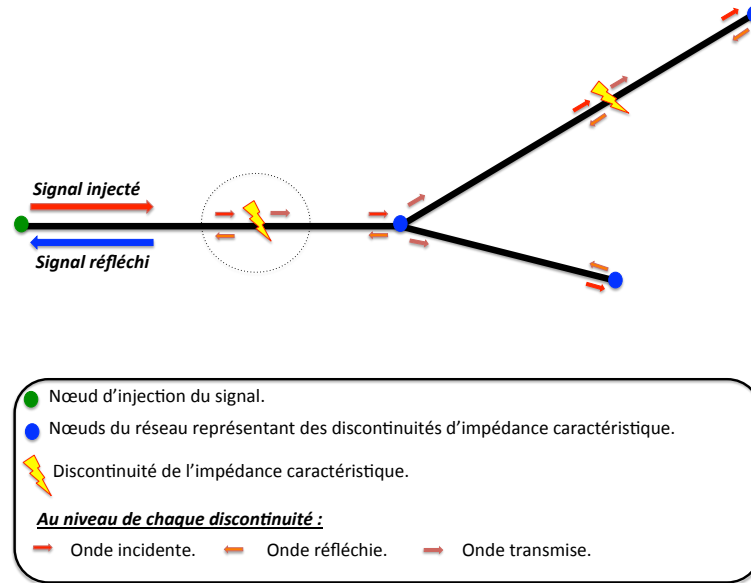


FIGURE 1.5 – Principe de la réflectométrie sur un réseau en étoile.

Dans le contexte de diagnostic filaire, la réflectométrie consiste à injecter un signal dans le réseau des câbles électriques à tester et à analyser le signal réfléchi. En effet, comme il est illustré dans la Figure 1.5, le signal injecté se propage dans le réseau et lorsqu'il rencontre une discontinuité ou une variation d'impédance, une partie de son énergie est renvoyée vers le point d'injection et l'autre partie est transmise dans le reste du réseau. L'analyse du signal réfléchi, via le coefficient de réflexion, qui est le rapport entre le signal réfléchi et le signal injecté, permet de remonter à certaines caractéristiques du réseau [93, 112].

Selon le type du signal injecté, nous distinguons deux catégories de la réflectométrie [75] : La réflectométrie dans le domaine temporel (TDR)<sup>2</sup> [91, 89] et dans le domaine fréquentiel (FDR)<sup>3</sup> [42].

**TDR :** La méthode de la réflectométrie dans le domaine temporel classique consiste à envoyer une onde de tension à support (presque) compact dans la ligne ou le réseau de lignes de transmission et à analyser le signal réfléchi au niveau de la

2. TDR : Time Domain Reflectometer en anglais.

3. FDR : frequency Domain Reflectometer en anglais.

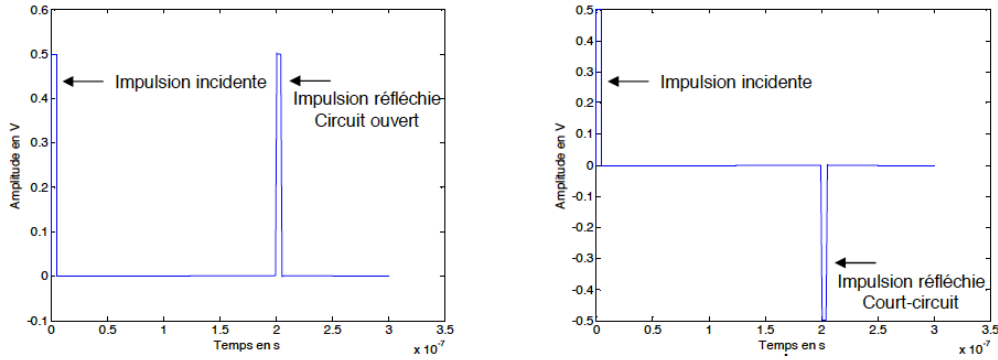


FIGURE 1.6 – TDR en injectant une impulsion dans une ligne de transmission simple (source : [75]).

source. Nous pouvons injecter différents types de signaux tels que les échelons, les fonctions portes ou les impulsions gaussiennes. La Figure 1.6 représente un exemple de la TDR en injectant une impulsion dans une ligne de transmission simple en chargeant ces extrémités par un circuit ouvert et un court circuit. L'analyse des amplitudes et le retard de propagation des pics, détectés dans le réflectogramme<sup>4</sup> du coefficient de réflexion, nous permet de localiser les positions et de déterminer la nature des discontinuités dans le réseau.

Dans le domaine temporel, nous avons d'autres méthodes de diagnostic filaire dérivées de la TDR classique comme la réflectométrie par séquence directe (ou STDR) [49, 97], la réflectométrie par étalement de spectre (ou SSTDR) [94] et la réflectométrie multi-porteuse (ou MCTDR<sup>5</sup>) [53].

Les méthodes STDR et SSTDR reposent sur le même principe que la méthode de la réflectométrie classique qui est décrite précédemment. La différence est que le signal injecté dans le réseau consiste en une séquence numérique pseudo-aléatoire. La méthode MCTDR est utilisée pour le diagnostic embarqué des câbles de réseaux électriques et son principe consiste à injecter un signal multiporteuse dans un câble du réseau de manière à ne pas l'interférer avec les autres signaux dans le câble [75].

**FDR :** La méthode de la réflectométrie dans le domaine fréquentiel consiste typiquement à injecter un signal wobulé<sup>6</sup> en fréquence comme il est illustré dans la Figure 1.7. Selon le paramètre analysé (fréquence, phase ou amplitude), nous distinguons plusieurs méthodes dérivées de la FDR :

- La FMCW [98] (Frequency Modulated Continuous Wave) mesure le décalage en fréquence entre l'onde émise et l'onde récupérée à la source.

4. Il est présenté sous la forme d'une succession de pics, correspondant aux réflexions de l'onde incidente sur les différentes discontinuités dans le réseau (défauts dans les lignes, positions des noeuds, positions des connecteurs, etc.).

5. Multicarrier Time Domain Reflectometry

6. Il est connu également sous le nom de signal *chirp* qui est utilisé pour les applications radar[29, 95].

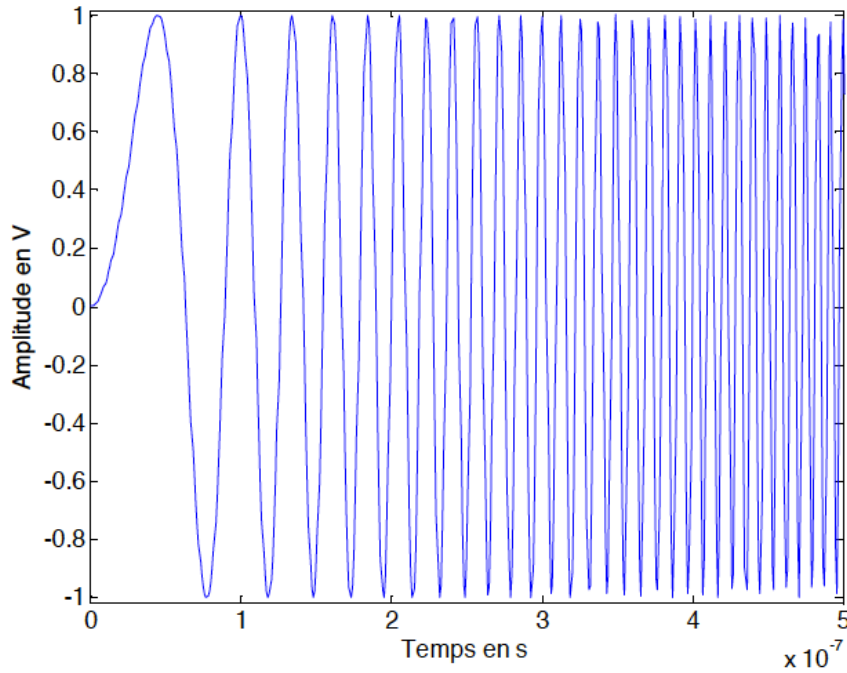


FIGURE 1.7 – Signal wobulé en fréquence pour une application FDR (source : [75]).

- La PDFDR [28] (Phase Detection Frequency Domain Reflectometry) mesure le décalage de phase de l'onde émise et l'onde récupérée à la source.
- La SWR [50] (Standing Wave Reflectometry) consiste à injecter un signal à haute fréquence dans le câble [59] et à analyser l'onde stationnaire à la source.

Plus loin dans ce chapitre, nous allons présenter les performances actuelles apportées par les méthodes de la réflectométrie. Avant cela, nous rappelons la théorie des lignes de transmission qui est la base des méthodologies développées pour la détection des défauts dans les réseaux électriques.

## 1.2 Rappels sur les modèles d'une ligne de transmission

Une ligne de transmission est constituée généralement de deux câbles conducteurs séparés par une matière diélectrique. Nous modélisons une ligne de transmission par une série infinie des éléments, de longueur infinitésimale  $dz$  ( $z$  est la coordonnée de l'espace), mises en cascade.

### 1.2.1 Modèle de la ligne des télégraphistes

Comme il est illustré dans la Figure 1.8, chaque élément de longueur  $dz$  est caractérisé par quatre paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$  dont la détermination dépend de la forme et de la composition du conducteur [99]. En effet,

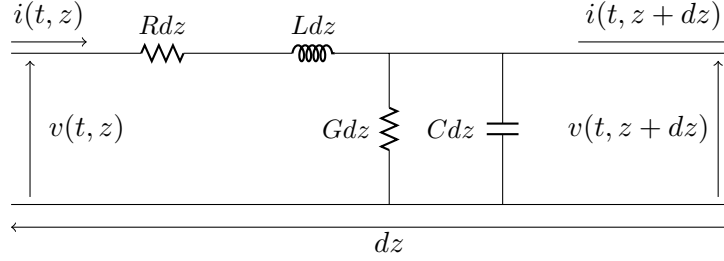


FIGURE 1.8 – Élément infinitésimal d'une ligne de transmission.

$i(t, z)$  : Le courant à l'instant  $t$  et à la position  $z$ .

$v(t, z)$  : La tension à l'instant  $t$  et au position  $z$ .

$L$  : L'inductance linéique dépend du diamètre des conducteurs, de l'écart entre les deux conducteurs (ou le conducteur et le plan de masse) et la perméabilité de l'âme conductrice du câble et elle s'exprime en Henry/mètre (H/m).

$C$  : La capacité linéique dépend de la permittivité du diélectrique, du diamètre des conducteurs, de l'écart entre les deux conducteurs et elle s'exprime en Farad/mètre (F/m).

$R$  : La résistance linéique modélise l'effet de Joule qui représente les pertes ohmique dans le conducteur. Elle dépend des diamètres des conducteurs et de la résistivité de l'âme conductrice des câbles et elle s'exprime en ohms/mètre ( $\Omega/m$ ).

$G$  : La conductance linéique représente les pertes dues à l'imperfection de la matière diélectrique. Elle dépend de la capacité linéique et l'angle du diélectrique et elle s'exprime en Siemens/mètre (S/m).

Les lignes de transmission électriques sont donc des systèmes à paramètres répartis, c'est à dire que les grandeurs physiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$  sont réparties sur toute la longueur de la ligne. En partant d'une modélisation en trois dimensions d'une ligne de transmission (les conducteurs séparés par l'isolant), la propagation des ondes électro-magnétique est décrite par les équations de Maxwell [71]. Sous certaines hypothèses simplificatrices, ce modèle 3d réduit en 1d est également paramétré par les paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$ , en accord avec l'interprétation par le circuit élémentaire illustré par la Figure 1.8. Cette approche de modélisation conduit aux équations des télégraphistes décrites ci-dessous et vérifiées par le courant  $i$  et la tension  $v$  dans le domaine temporel.

**Remarque 4.** Selon les paramètres linéiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$ , nous distinguons les lignes de transmission suivantes :

- Une ligne de transmission est uniforme si les paramètres linéiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$  sont indépendants de  $z$ .

- Une ligne de transmission est non uniforme si les paramètres linéiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$  dépendent de la coordonnée d'espace  $z$ .
- Une ligne de transmission est sans perte si  $R(z) = 0$  et  $G(z) = 0$  sur toute la ligne.

### 1.2.1.1 Equations des télégraphistes dans le domaine temporel

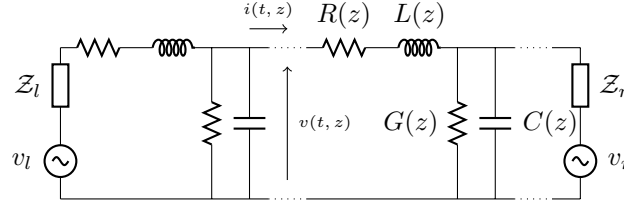


FIGURE 1.9 – Ligne de transmission connectée aux sources de tensions  $v_l$  et  $v_r$ .

Nous considérons une ligne de transmission simple de longueur  $\ell = |z_r - z_l|$  où  $z_r$  et  $z_l$  représentent respectivement les coordonnées de l'extrémité droite et l'extrémité gauche de la ligne. Nous nous intéressons à la propagation d'un signal dans un élément infinitésimal d'une ligne électrique comme il est illustré dans la Figure 1.8. En appliquant les lois d'Ohm sur la tension  $v(t, z)$  et sur le courant  $i(t, z)$ , nous obtenons les équations suivantes :

$$v(t, z) - R(z)dz i(t, z) - L(z)dz \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} - v(t, z + dz) = 0 \quad (1.1)$$

$$i(t, z) - G(z)dz v(t, z + dz) - C(z)dz \frac{\partial v(t, z + dz)}{\partial t} - i(t, z + dz) = 0 \quad (1.2)$$

où les paramètres linéiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$  dépendent de la position  $z$ .

Le passage à la limite ( $dz \rightarrow 0$ ) dans les équations (1.1) et (1.2) conduit aux équations des télégraphistes dans le domaine temporel :

$$\forall z \in [z_r, z_l], \forall t \geq 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, z)}{\partial z} + L(z) \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} + R(z) i(t, z) = 0 \\ \frac{\partial i(t, z)}{\partial z} + C(z) \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} + G(z) v(t, z) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ces équations différentielles partielles décrivent l'évolution instantanée du courant  $i$  et de la tension  $v$  le long de la ligne de transmission. Dans la littérature des lignes de transmission [71, 81], on peut également obtenir les équations des télégraphistes (1.3) en partant des équations de Maxwell.

Nous associons aux équations des télégraphistes (1.3) les conditions aux bords suivantes (voir Figure 1.9) :

$$\begin{cases} v(t, z_r) - \mathcal{Z}_r(t) * i(t, z_r) = v_r(t) \\ v(t, z_l) + \mathcal{Z}_l(t) * i(t, z_l) = v_l(t) \end{cases} \quad (1.4)$$



où :

- $\mathcal{Z}_r$  : réponse impulsionnelle tension-courant de la charge en  $z_r$ .
- $\mathcal{Z}_l$  : réponse impulsionnelle tension-courant de la charge en  $z_l$ .
- $v_r$  : tension de la source en  $z_r$ .
- $v_l$  : tension de la source en  $z_l$ .
- $*$  : produit de convolution.

**Remarque 5.** La réponse impulsionnelle ( $\mathcal{Z}_l$  ou  $\mathcal{Z}_r$ ) représente la réponse en tension d'une impulsion de courant. En général, cette réponse impulsionnelle est associée à la somme de l'impédance interne de la source et l'impédance de la charge.

### 1.2.1.2 Equations des télégraphistes dans le domaine fréquentiel

Nous considérons ici les régimes harmoniques en temps de pulsation (ou fréquence temporelle)  $\omega$ . Nous choisissons des sources de tension mono-fréquentielle de pulsation  $\omega$  comme suit :

$$v_r(t) = V_r(\omega)e^{j\omega t} ; \quad v_l(t) = V_l(\omega)e^{j\omega t} \quad (1.5)$$

où  $V_l(\omega)$  et  $V_r(\omega)$  représentent respectivement les amplitudes des signaux  $v_l$  et  $v_r$ . En négligeant le transitoire initial, le courant  $i$  et la tension  $v$  en tout point spatial  $z$  sont sinusoïdaux en temps et s'expriment sous la forme :

$$v(t, z) = V(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (1.6)$$

$$i(t, z) = I(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

où le courant  $I(\omega, z)$  et la tension  $V(\omega, z)$  sont des valeurs complexes. En reportant (1.6) et (1.7) dans (1.3), nous obtenons les équations des télégraphistes, dans le domaine fréquentiel, suivantes :  $\forall z \in [z_r, z_l]$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}V(\omega, z) = -(R(z) + j\omega L(z))I(\omega, z) \\ \frac{d}{dz}I(\omega, z) = -(G(z) + j\omega C(z))V(\omega, z) \end{cases} \quad (1.8)$$

Les conditions aux bords (1.4) deviennent :

$$\begin{cases} V(\omega, z_l) + \mathcal{Z}_l(\omega)I(\omega, z_l) = V_l(\omega) \\ V(\omega, z_r) - \mathcal{Z}_r(\omega)I(\omega, z_r) = V_r(\omega) \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $\mathcal{Z}_l$  et  $\mathcal{Z}_r$  représentent respectivement la somme des impédances de charges à gauche et à droite et des impédances internes aux sources. Elles sont égales respectivement aux transformées de Fourier des réponses impulsionnelles  $\mathcal{Z}_l$  et  $\mathcal{Z}_r$ .

## 1.2.1.3 Impédance caractéristique et exposant de propagation

- **Impédance caractéristique locale** L'impédance caractéristique, notée  $\zeta$ , d'un quadripôle est l'impédance telle que, si l'on connecte à sa sortie une impédance de charge d'impédance égale à  $\zeta$ , son impédance d'entrée est aussi égale à  $\zeta$ . Nous appelons également l'impédance caractéristique *l'impédance image*.

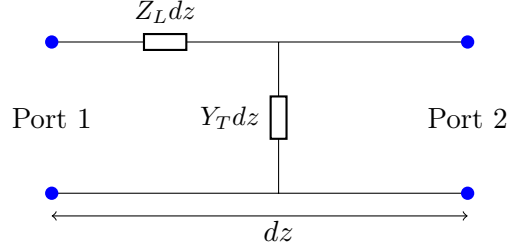


FIGURE 1.10 – Élément infinitésimal d'une ligne de transmission vu comme un quadripôle.

Dans la littérature des lignes de transmission, nous modélisons un élément infinitésimal d'une ligne électrique, de longueur  $dz$ , par un quadripôle particulier [3], dit "quadripôle en L inversé", formé d'une impédance longitudinale  $Z_L$  et une admittance transversale  $Y_T$ , comme il est illustré dans la Figure 1.10, telles que :

$$\forall z \in [z_r, z_l], \quad Z_L(\omega, z) = R(z) + j\omega L(z), \quad Y_T(\omega, z) = G(z) + j\omega C(z) \quad (1.10)$$

Afin d'exprimer l'impédance caractéristique de la ligne en fonction des paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et  $C$ , nous connectons une impédance  $Z_2$  au port 2 et nous exprimons l'impédance d'entrée  $Z_1$  au port 1 en fonction des impédances  $Z_L$ ,  $Z_2$  et l'admittance  $Y_T$ .

En appliquant les lois d'Ohm, nous avons,

$$\begin{aligned} Z_1(\omega) &= Z_L(\omega, z)dz + \left( (Y_T(\omega, z)dz)^{-1} \parallel Z_L(\omega, z)dz + Z_2(\omega) \right) \\ &= Z_L(\omega, z)dz + \frac{(Y_T(\omega, z)dz)^{-1} (Z_L(\omega, z)dz + Z_2(\omega))}{(Y_T(\omega, z)dz)^{-1} + Z_L(\omega, z)dz + Z_2(\omega)} \end{aligned}$$

où le signe  $\parallel$  signifie "parallèle" pour deux impédances. Nous obtenons une équation de l'impédance caractéristique  $\zeta$ , en remplaçant  $Z_1$  et  $Z_2$  par celle-ci,

$$\zeta(\omega, z) = Z_L(\omega, z)dz + \frac{(Y_T(\omega, z)dz)^{-1} (Z_L(\omega, z)dz + \zeta(\omega, z))}{(Y_T(\omega, z)dz)^{-1} + Z_L(\omega, z)dz + \zeta(\omega, z)} \quad (1.11)$$

$\Rightarrow$

$$\zeta^2(\omega, z) = Z_L^2(\omega, z)dz^2 + \frac{Z_L(\omega, z)}{Y_T(\omega, z)} \quad (1.12)$$

En passant à la limite ( $dz \rightarrow 0$ ), nous définissons l'impédance caractéristique locale de la ligne de transmission ainsi :

**Définition 1.** *L'impédance caractéristique locale de la ligne de transmission est définie par :*

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad \zeta(\omega, z) := \sqrt{\frac{Z_L(\omega, z)}{Y_T(\omega, z)}} = \sqrt{\frac{R(z) + j\omega L(z)}{G(z) + j\omega C(z)}} \quad (1.13)$$

La ligne de transmission étant passive, cette racine carré désigne la racine complexe dont la partie réelle est positive. Pour le besoin de certaines analyses en haute fréquence, nous définissons l'impédance caractéristique en haute fréquence par :

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad \zeta_\infty(z) := \sqrt{\frac{L(z)}{C(z)}} \quad (1.14)$$

De manière similaire, nous définissons également l'admittance caractéristique locale de la ligne de transmission ainsi :

**Définition 2.** *L'admittance caractéristique locale de la ligne de transmission est définie par :*

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad Y_c(\omega, z) := \sqrt{\frac{Y_T(\omega, z)}{Z_L(\omega, z)}} = \sqrt{\frac{G(z) + j\omega C(z)}{R(z) + j\omega L(z)}} \quad (1.15)$$

Elle est l'inverse de l'impédance caractéristique  $\zeta$ . Nous définissons également l'admittance caractéristique en haute fréquence par :

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad Y_\infty(z) := \sqrt{\frac{C(z)}{L(z)}} \quad (1.16)$$

**Remarque 6.** *L'impédance caractéristique (resp. l'admittance caractéristique) en haute fréquence coïncide avec l'impédance caractéristique (resp. l'admittance caractéristique) d'une ligne sans perte.*

**- Exposant linéique de propagation** L'exposant linéique de propagation de la ligne, noté par  $\gamma$ , est défini ainsi :

**Définition 3.** *L'exposant linéique de propagation de la ligne de transmission  $\gamma$  est défini par :*

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad \gamma(\omega, z) = \sqrt{Z_L(\omega, z)Y_T(\omega, z)} \quad (1.17)$$

$$= \sqrt{(R(z) + j\omega L(z))(G(z) + j\omega C(z))} \quad (1.18)$$

L'exposant de propagation se décompose en  $\alpha$  et  $\beta$ , que l'on nomme respectivement *coefficient d'atténuation* et *coefficient de phase* (ou de dispersion) tels que :

$$\forall z \in [z_l, z_r], \quad \gamma(\omega, z) = \alpha(\omega, z) + j\beta(\omega, z) \quad (1.19)$$

D'après les relations (1.18) et (1.19), nous avons,  $\forall z \in [z_l, z_r]$

$$\begin{aligned} \gamma^2(\omega, z) &= \alpha^2(\omega, z) - \beta^2(\omega, z) + 2j\alpha(\omega, z)\beta(\omega, z) \\ &= R(z)G(z) + j\omega R(z)C(z) + j\omega L(z)G(z) - \omega^2 L(z)C(z) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha^2(\omega, z) - \beta^2(\omega, z) = R(z)G(z) - \omega^2 L(z)C(z) \quad (1.20)$$

$$2\alpha(\omega, z)\beta(\omega, z) = \omega(R(z)C(z) + L(z)G(z)) \quad (1.21)$$

En remplaçant le coefficient  $\alpha$  dans l'équation (1.20), nous montrons que le coefficient  $\beta$  est solution de l'équation suivante :

$$\beta^4(\omega, z) + \beta^2(\omega, z)(R(z)G(z) - \omega^2 L(z)C(z)) - \frac{\omega^2}{4}(R(z)C(z) + L(z)G(z))^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\beta^2(\omega, z) = \frac{1}{2} \left( -R(z)G(z) + \omega^2 L(z)C(z) + \sqrt{(R^2(z) + \omega^2 L(z)^2)(G(z)^2 + \omega^2 C(z)^2)} \right)$$

La ligne de transmission étant passive, le coefficient  $\alpha$  doit être positif. D'après la relation (1.21), le coefficient  $\beta$  doit être également positif, d'où :

$$\beta(\omega, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-R(z)G(z) + \omega^2 L(z)C(z) + \sqrt{(R^2(z) + \omega^2 L(z)^2)(G(z)^2 + \omega^2 C(z)^2)}}$$

par conséquent, l'exposant d'atténuation  $\alpha$  est donné par :

$$\alpha(\omega, z) = \omega \frac{(R(z)C(z) + L(z)G(z))}{2\beta(\omega, z)} \quad (1.22)$$

Nous déduisons donc que la ligne de transmission réelle peut entraîner deux types de déformations des ondes transmises : l'atténuation et la dispersion.

**- Atténuation** À cause des pertes par l'effet de Joule, le signal subit à une décroissance exponentielle le long de son trajet comme il est illustré dans la Figure 1.11.

Le coefficient  $\alpha$  détermine l'atténuation linéique de la ligne en fonction de la distance  $z$  et il s'exprime en *neper/m* (*np/m*). On l'exprime également en *dB/m*.



FIGURE 1.11 – Phénomène d’atténuation (source : [72]).

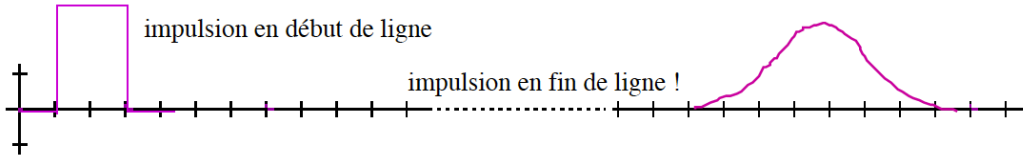


FIGURE 1.12 – Phénomène de dispersion (source : [72]).

- **Dispersion** Le coefficient de phase  $\beta$  est relié à la vitesse de phase et il s’exprime par  $rad/m$ . La dépendance de  $\beta$  en  $\omega$  implique une variation de la vitesse des signaux en fonction de leur fréquence ( $2\pi\omega$ ). Pour un signal qui contient plus d’une fréquence, les composants fréquentiels se propagent à des vitesses différentes, ce qui provoque une déformation de sa forme pendant sa propagation. La Figure 1.12, représente un signal rectangulaire subissant le phénomène de dispersion.

**Remarque 7.** Nous rencontrons fréquemment un troisième phénomène qui concerne les lignes de transmission disposées l’une voisine de l’autre. C’est la diaphonie : par un couplage électromagnétique, une partie de l’énergie sur une ligne est transmise à la deuxième ligne. Ce phénomène n’est pas pris en compte dans cette thèse.

La variation de l’impédance caractéristique de la ligne  $\zeta$ , ainsi que les phénomènes de dispersion et d’atténuation peuvent atteindre une certaine gravité pour être considérés comme des défauts non francs que l’on trouve sur les réseaux des lignes de transmission.

### 1.2.2 Equations de Zakharov-Shabat (ZS)

Nous allons reformuler les équations des télégraphistes en termes d’ondes de puissance incidente et réfléchie. Dans la suite, nous allons appliquer plusieurs transformations dont la première étape est de remplacer la coordonnée de l’espace  $z$  par la distance électrique  $x$  en utilisant la transformation de Liouville [48].

#### 1.2.2.1 Transformation de Liouville

En réflectométrie temporelle, l’analyse des signaux se fait en fonction du temps de propagation des ondes. Il est donc plus commode d’utiliser ce temps de propagation à la place de la coordonnée spatiale dans les modèles de ligne de transmission

tels que les équations de télégraphistes. Dans notre contexte, la transformation de Liouville permet de remplacer la coordonnée d'espace  $z$  par le temps de propagation noté  $x$ .

Considérons une ligne de transmission simple de longueur géométrique  $\ell = |z_r - z_l|$ . La transformation de Liouville s'exprime comme suit :

$$x(z) = \int_{z_l}^z \sqrt{L(s)C(s)} ds + x_l \quad (1.23)$$

où  $x_l$  est une valeur choisie arbitrairement et pour tout  $z$  dans  $[z_l, z_r]$ , nous avons  $x(z) \in [x_l, x_r]$ . Dans la suite, nous notons le temps de propagation correspondant à la longueur  $\ell$  de la ligne par  $l$  tel que  $l = |x_r - x_l|$ . La fonction  $x(z)$  étant monotonement croissant, son inverse  $z(x)$  existe également.

**Remarque 8.** *En ingénierie, le temps de propagation  $x$  est appelé la distance électrique.*

En utilisant cette transformation sous la forme  $dx = \sqrt{L(z)C(z)}dz$ , les équations des télégraphistes (1.8) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{dV(\omega, x)}{dx} = - \left( j\omega + \frac{R(x)}{L(x)} \right) \zeta_\infty(x) I(\omega, x) \\ \frac{dI(\omega, x)}{dx} = - \left( j\omega + \frac{G(x)}{C(x)} \right) \zeta_\infty^{-1}(x) V(\omega, x) \end{cases} \quad (1.24)$$

où par abus de notation, nous avons écrit  $R(x)$  à la place de  $R(z(x))$ , de même pour les autres paramètres linéiques de la ligne de transmission. La notation  $\zeta_\infty$  est définie dans (1.14). Les conditions aux bords (1.9) deviennent :

$$\begin{cases} V(\omega, x_r) - Z_r(\omega) I(\omega, x_r) = V_r(\omega) \\ V(\omega, x_l) + Z_l(\omega) I(\omega, x_l) = V_l(\omega) \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $Z_r$  et  $Z_l$  représentent respectivement les impédances des charges passives connectées aux extrémités droite et gauche de la ligne. Dans l'expérience de la réflectométrie, les conditions aux bords du système des équations (1.8) ou (1.24) correspondent à la connexion d'une source à l'extrémité d'injection du signal dans la ligne et d'une charge passive connectée à l'autre extrémité. Nous avons les deux situations suivantes :

**Absence de la source de tension  $V_r$  :**

$$\begin{cases} V(\omega, x_l) + Z_l(\omega) I(\omega, x_l) = V_l(\omega) \\ V(\omega, x_r) - Z_r(\omega) I(\omega, x_r) = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Selon les valeurs de l'impédance de charge  $Z_r$ , nous rencontrons les cas particuliers suivants :

- $Z_r(\omega) = 0$  : cela correspond au cas d'un court circuit à l'extrémité droite de la ligne. Dans ce cas la deuxième équation de (1.26) devient

$$V(\omega, x_r) = 0$$

- $Z_r(\omega) = +\infty$  : cela correspond au cas d'un circuit ouvert à l'extrémité droite de la ligne. Dans ce cas la deuxième équation de (1.26) devient

$$I(\omega, x_r) = 0$$

- $Z_r(\omega) = \zeta(\omega, x_r)$  : cette situation représente l'adaptation de la charge  $Z_r$  à la ligne en  $x_r$  sur  $[x_l, x_r]$ .

**Absence de la source de tension  $V_l$  :**

$$\begin{cases} V(\omega, x_l) + Z_l(\omega)I(\omega, x_l) &= 0 \\ V(\omega, x_r) - Z_r(\omega)I(\omega, x_r) &= V_r(\omega) \end{cases} \quad (1.27)$$

Par symétrie, les cas particuliers de circuit ouvert ou de court circuit à l'extrémité gauche de la ligne peuvent également être rencontrés.

### 1.2.2.2 Transformations des équations des télégraphistes aux équations de ZS

Comme nous allons voir plus loin, dans l'état de l'art concernant l'étude théorique du problème inverse sur les lignes de transmission [96, 34], il est plus commode de remplacer la pulsation  $\omega$  par le nombre d'onde  $k$  afin d'utiliser des algorithmes d'inversion bien étudiés avec les équations de Zakharov-Shabat (ZS). Étant donné que nous ne nous intéressons pas au problème inverse sur les lignes de transmission, nous conservons la notation de la pulsation  $\omega$  en présentant les équations de Zakharov-Shabat. Nous définissons deux ondes de puissances  $\nu_1$  et  $\nu_2$  qui représentent respectivement l'onde réfléchie et l'onde incidente :

$$\nu_1(\omega, x) := \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) - \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (1.28a)$$

$$\nu_2(\omega, x) := \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) + \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (1.28b)$$

Nous pouvons en déduire facilement les expressions du courant  $I$  et de la tension  $V$  ainsi :

$$V(\omega, x) = \frac{1}{2}\zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)(\nu_1(\omega, x) + \nu_2(\omega, x)) \quad (1.29a)$$

$$I(\omega, x) = -\frac{1}{2}\zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)(\nu_1(\omega, x) - \nu_2(\omega, x)) \quad (1.29b)$$

Ce changement de variables nous conduit aux équations de Zakharov-Shabat suivantes :

**Définition 4.** Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux ondes de puissance définies par (1.28), les équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_1(\omega, x)}{dx} - j\omega\nu_1(\omega, x) &= q_d(x)\nu_1(\omega, x) - q_+(x)\nu_2(\omega, x) \\ \frac{d\nu_2(\omega, x)}{dx} + j\omega\nu_2(\omega, x) &= -q_d(x)\nu_2(\omega, x) - q_-(x)\nu_1(\omega, x) \end{cases} \quad (1.30)$$

où les potentiels  $q_{\pm}$  et  $q_d$  sont donnés par :

$$q_{\pm}(x) = \frac{1}{2} \frac{d\zeta_{\infty}(x)}{dx} \zeta_{\infty}^{-1}(x) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} - \frac{G(x)}{C(x)} \right) \quad (1.31)$$

$$q_d(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} + \frac{G(x)}{C(x)} \right) \quad (1.32)$$

représentent les équations de Zakharov-Shabat.

Nous rappelons que les équations de ZS utilisées dans l'étude des problèmes inverses sur les lignes de transmission dépendent du nombre d'onde  $k$ . En effet, nous avons une relation entre  $k$  et  $\omega$  (relation de dispersion). D'après [48], ces équations s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_1(k, x)}{dx} + jk\nu_1(k, x) &= q_d(x)\nu_1(k, x) - q_+(x)\nu_2(k, x) \\ \frac{d\nu_2(k, x)}{dx} - jk\nu_2(k, x) &= -q_d(x)\nu_2(k, x) - q_-(x)\nu_1(k, x) \end{cases} \quad (1.33)$$

La différence entre les équations de ZS (1.33) et les équations de ZS (1.30) se trouve au niveau des signes devant  $j\omega$  et  $jk$ . Nous pouvons passer des équations de ZS (1.30) aux équations de ZS (1.33) soit en inversant le signe de  $\omega$ , soit en interchangeant  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Dans l'Annexe A, nous montrerons la relation entre les équations (1.33) et les équations (1.30).

**Remarque 9.** En analysant les équations de ZS (1.30), nous remarquons que :

- Les deux ondes de puissance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  représentent respectivement l'onde réfléchie et l'onde incidente en supposant que le courant électrique se propage de l'extrémité  $x_l$  vers l'extrémité  $x_r$  avec  $x_l < x_r$ .
- Les termes de couplage des propagations des ondes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont dus :
  1. au terme  $\frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} - \frac{G(x)}{C(x)} \right)$  qui est à l'origine du phénomène de dispersion.
  2. au terme  $\frac{d\zeta_{\infty}(x)}{dx} \zeta_{\infty}^{-1}(x)$  qui est lié à la non homogénéité de l'impédance caractéristique.
- L'atténuation des ondes (le terme  $\frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} + \frac{G(x)}{C(x)} \right)$ ) ne provoque pas de couplage.



En utilisant les conditions aux bords (1.25), nous déduisons les conditions aux bords génériques associées au système des équations de ZS :

$$\begin{cases} \nu_1(\omega, x_r) - \rho_r(\omega)\nu_2(\omega, x_r) = (1 - \rho_r(\omega))\nu_{1d}(\omega) \\ \nu_2(\omega, x_l) - \rho_l(\omega)\nu_1(\omega, x_l) = (1 - \rho_l(\omega))\nu_{2g}(\omega) \end{cases} \quad (1.34)$$

où,

$$\rho_r(k) = \frac{Z_r(\omega) - \zeta_\infty(x_r)}{Z_r(\omega) + \zeta_\infty(x_r)}; \quad \nu_{1d}(\omega) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x_r)V_r(\omega) \quad (1.35a)$$

$$\rho_l(k) = \frac{Z_l(\omega) - \zeta_\infty(x_l)}{Z_l(\omega) + \zeta_\infty(x_l)}; \quad \nu_{2g}(\omega) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x_l)V_l(\omega) \quad (1.35b)$$

### 1.3 Modèles des réseaux électriques filaires

Comme nous avons mentionné précédemment, un réseau électrique filaire est l'ensemble des câbles électriques connectant des équipements électriques ou électroniques pour véhiculer de l'énergie et de l'information. La Figure 1.13 représente le schéma d'un faisceau arborescent correspondant au câblage d'une voiture. En négligeant l'influence de la disposition géométrique d'un câble sur ses propriétés de transmission et en négligeant aussi le phénomène de diaphonie. Les propriétés des réseaux électriques sont déterminées par les caractéristiques des câbles et par la structure de connexion que l'on appelle *la topologie du réseau électrique*.

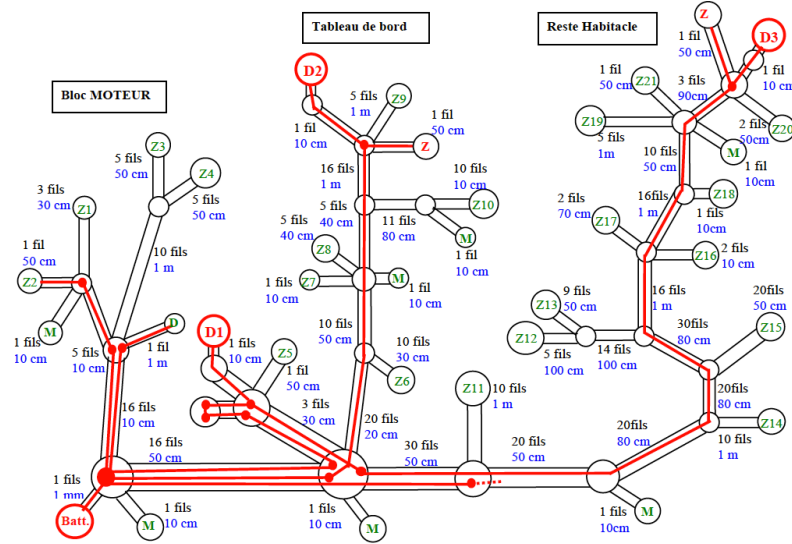


FIGURE 1.13 – Faisceau arborescent correspondant au câblage d'une voiture issu de l'interface du logiciel CRIPTE (source : [65]).

### 1.3.1 Définitions et caractéristiques des réseaux électriques filaires

En mathématiques, un réseau désigne une forme de groupe discret et il est présenté souvent par un graphe.

**Définition 5.** *Un graphe est un objet mathématique défini par deux ensembles :*

- Ensemble de sommets.
- Ensemble d'arrêtes dont chaque arrête lie deux sommets.

Nous considérons un réseau électrique, noté  $\mathcal{G}$  dont les noeuds et les branches sont respectivement représentés par les sommets et les arêtes du graphe associé au réseau. Afin de spécifier la topologie du réseau, nous numérotions les noeuds et notons les branches en fonction des noeuds tels que :

- Le  $m^{\text{ème}}$  noeud du réseau est noté par  $N_m$ , avec  $m \in \mathcal{E} = \{1, \dots, \#N(\mathcal{G})\}$  où  $\mathcal{E}$  représente l'ensemble des noeuds du réseau et  $\#N(\mathcal{G})$  représente le nombre total des noeuds. Nous réservons l'indice 0 pour indiquer le plan de masse.
- Chaque branche délimitée par deux noeuds  $N_m$  et  $N_n$  est notée par  $B_{m-n}$  avec  $m-n \in \mathcal{B}$  telle que :

$$\mathcal{B} = \{m-n \text{ pour } 1 \leq m \leq \#N(\mathcal{G}) \text{ et } m < n \leq \#N(\mathcal{G}) \text{ tels qu'il existe une branche entre } N_m \text{ et } N_n\}$$

Nous notons le nombre total des branches par  $\#B(\mathcal{G})$  et les branches rebouclant sur le même noeud  $N_m$  par  $B_{m-m}$ . Dans la suite, nous supposons qu'il y a au plus une seule branche entre chaque paire de noeuds.

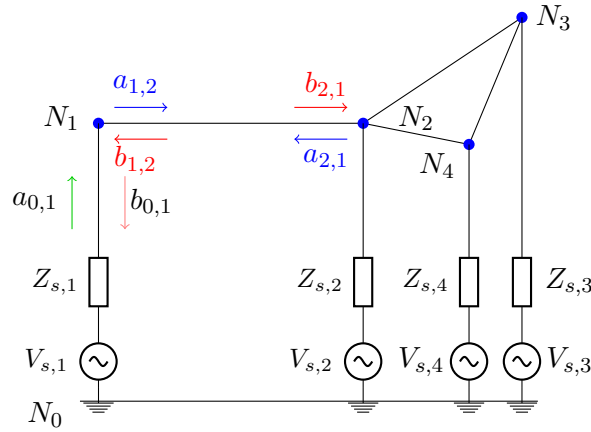


FIGURE 1.14 – Notation des branches et des noeuds d'un réseau électrique.

Dans un réseau électrique, nous distinguons deux types de noeuds : noeuds terminaux et noeuds intermédiaires :

- Les *noeuds terminaux* sont les nœuds qui se trouvent aux extrémités libres des branches et ils ne sont connectés qu'à une seule branche. Ils sont éventuellement connectés à des charges sous forme de dipôles (résistance, inductance, capacité,...) dont l'autre pôle est connecté au plan de masse  $N_0$ . Nous notons l'ensemble des noeuds terminaux du réseau  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{E}^\circ$ .
- Les *noeuds intermédiaires* permettent de connecter les branches du réseau entre elles pour caractériser par exemple des bifurcations ou des connexions entre les branches. Nous pouvons également y connecter des impédances de charges et des sources de tensions. Nous notons l'ensemble des noeuds intermédiaires du réseau  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{E}^*$ .

Dans la suite, nous réservons la terminologie *noeud idéal* pour un noeud intermédiaire auquel nous ne connectons pas d'impédance de charge et de source de tension.

**Remarque 10.** *L'ensemble des noeuds d'un réseau  $\mathcal{G}$ , noté  $\mathcal{E}$ , vérifie*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^\circ \cup \mathcal{E}^*$$

Dans la suite, chaque branche  $B_{m-n}$  est considérée comme une ligne de transmission simple et elle est caractérisée par ses paramètres linéiques  $L_{m-n}$ ,  $R_{m-n}$ ,  $G_{m-n}$  et  $C_{m-n}$  et par sa longueur géométrique  $\ell_{m-n} = |z_m - z_n|$  (en terme de temps de propagation, nous avons  $l_{m-n} = |x_m - x_n|$ ) où  $z_m$  et  $z_n$  représentent les coordonnées de l'espace associées aux noeuds  $N_m$  et  $N_n$ .

**Remarque 11.** *Les paramètres associés à la branche  $B_{m-n}$  dépendants de l'orientation sont indexés par  $(m,n)$  ou  $(n,m)$ . Cependant, les variables indépendantes de l'orientation de la branche sont indexées par  $(m-n)$ .*

### 1.3.2 Equations des télégraphistes des branches d'un réseau

Soient  $I_{m,n}(\omega, x)$  et  $V_{m,n}(\omega, x)$  le courant entrant dans la branche  $B_{m-n}$  par le noeud  $N_m$  et la tension sur la branche  $B_{m-n}$  qui sont évalués au point de coordonnée  $x$ . Nous associons à chaque branche  $B_{m-n}$  des équations des télégraphistes (1.24) vérifiées par le courant  $I_{m,n}$  et la tension  $V_{m,n}$ . En supposant que l'axe des coordonnées en distance électrique  $x$  à le sens du courant  $I_{m,n}$ , nous obtenons le système des équations différentielles suivant :  $\forall x \in ]x_m, x_n[$ ,

$$\begin{cases} \frac{dV_{m,n}(\omega, x)}{dx} = - \left( j\omega + \frac{R_{m-n}(x)}{L_{m-n}(x)} \right) \zeta_{\infty m-n}(x) I_{m,n}(\omega, x) \\ \frac{dI_{m,n}(\omega, x)}{dx} = - \left( j\omega + \frac{G_{m-n}(x)}{C_{m-n}(x)} \right) \zeta_{\infty m-n}^{-1}(x) V_{m,n}(\omega, x) \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $x_m$  et  $x_n$  représentent respectivement les coordonnées en distance électrique des deux extrémités de la branche  $B_{m-n}$ .

**Remarque 12.**

- Le courant  $I_{m,n}(\omega, x)$  et la tension  $V_{m,n}(\omega, x)$  sont reliés par la relation suivante :

$$\forall x \in [x_m, x_n], V_{m,n}(\omega, x) = Z_{ap_{m-n}}(\omega, x) I_{m,n}(\omega, x) \quad (1.37)$$

où  $Z_{ap_{m,n}}$  représente l'impédance apparente de la branche  $B_{m-n}$ . La relation duale de (1.37) est donnée par :

$$\forall x \in [x_m, x_n], I_{m,n}(\omega, x) = Y_{ap_{m-n}}(\omega, x) V_{m,n}(\omega, x) \quad (1.38)$$

où  $Y_{ap_{m-n}}$  représente l'admittance apparente de la branche  $B_{m-n}$ .

### 1.3.2.1 Conditions aux noeuds

**Noeuds non idéaux** Comme illustrée dans la Figure 1.14, à chaque noeud  $N_m$  non idéal, nous connectons une source de tension alternative  $V_{s,m}$  et une impédance  $Z_{s,m}$  qui représente la somme de l'impédance de charge connectée au noeud et l'impédance interne de la source. Considérons les notations suivantes :

- $I_{m,0}(\omega)$  : le courant traversant l'impédance  $Z_{s,m}$  vers le plan de masse ( $N_0$ ).
- $V_{m,0}(\omega)$  : la tension au noeud  $N_m$ .
- $I_{m,n}(\omega)$  : le courant entrant dans la branche  $B_{m-n}$  par le noeud  $N_m$  et évalué à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$ .
- $V_{m,n}(\omega)$  : la tension associée à la branche  $B_{m-n}$  et évalué à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$ .

**Remarque 13.** Ces tensions et courants à doubles indices sont toujours évalués à la position correspondant au premier indice (le noeud portant cet indice ou l'extrémité d'une branche connectée à ce noeud)

Le courant  $I_{m,0}$  et la tension  $V_{m,0}$  sont reliés par le modèle équivalent de Thévenin suivant :

$$V_{m,0}(\omega) - Z_{s,m}(\omega) I_{m,0}(\omega) = V_{s,m}(\omega) \quad (1.39)$$

Le courant  $I_{m,0}$  s'exprime en termes des courants entrants dans les branches comme suit :

$$I_{m,0}(\omega) = - \sum_{n \in \mathcal{C}_m} I_{m,n}(\omega) \quad (1.40)$$

où l'ensemble  $\mathcal{C}_m$  représente l'ensemble des indices des noeuds voisins au noeud  $N_m$ .

**Noeuds idéaux** Au niveau d'un noeud idéal  $N_m$ , nous avons un circuit ouvert ( $I_{m,0} = 0$ ), entre le noeud et le plan de masse, qui n'est pas couvert par la relation (1.39). D'après la continuité des courants et des tensions au noeud  $N_m$ , nous avons les conditions aux noeuds suivantes :

$$\sum_{n \in \mathcal{C}_m} I_{m,n}(\omega) = 0 \quad (1.41)$$

$$V_{m,n_j}(\omega) = V_{m,n_i}(\omega), \quad \forall (n_j, n_i) \in \mathcal{C}_m \quad (1.42)$$

### 1.3.3 Equations de ZS des branches d'un réseau

Considérons une branche  $B_{m-n}$  d'un réseau  $\mathcal{G}$ . Nous lui associons deux ondes de puissance  $\nu_{m,n}$  et  $\nu_{n,m}$  qui se propagent dans deux sens différents et elles sont définies par :

$$\nu_{n,m}(\omega, x) := \zeta_{\infty_{m-n}}^{-\frac{1}{2}}(x)V_{n,m}(\omega, x) - \zeta_{\infty_{m-n}}^{\frac{1}{2}}(x)I_{m,n}(\omega, x) \quad (1.43)$$

$$\nu_{m,n}(\omega, x) := \zeta_{\infty_{m-n}}^{-\frac{1}{2}}(x)V_{m,n}(\omega, x) + \zeta_{\infty_{m-n}}^{\frac{1}{2}}(x)I_{m,n}(\omega, x) \quad (1.44)$$

En utilisant les équations des télégraphistes (1.36), les ondes de puissance  $\nu_{m,n}$  et  $\nu_{n,m}$  vérifient le système des équations de Zakharov-Shabat suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_{n,m}(\omega, x)}{dx} - j\omega\nu_{n,m}(\omega, x) = q_{d_{m-n}}(x)\nu_{n,m}(\omega, x) - q_{+_{m-n}}(x)\nu_{m,n}(\omega, x) \\ \frac{d\nu_{m,n}(\omega, x)}{dx} + j\omega\nu_{m,n}(\omega, x) = -q_{d_{m-n}}(x)\nu_{m,n}(\omega, x) - q_{-_{m-n}}(x)\nu_{n,m}(\omega, x) \end{cases} \quad (1.45)$$

Les conditions aux bords associées à ce système sont déduites par les conditions aux bords (1.39) et (1.41) et les formules de changement de variables (1.43). Dans les prochains chapitres, nous allons introduire ces conditions selon le contexte de chaque chapitre.

## 1.4 Performances actuelles de la détection des défauts

Dans cette section, nous présentons quelques résultats et méthodes de diagnostic des défauts de réseaux de lignes de transmission. Nous commençons par des méthodes utilisées pour diagnostiquer les lignes de transmissions simples et qui peuvent être étendus au réseaux, ensuite nous présentons la performance des méthodes actuellement proposées pour le diagnostic des défauts des réseaux électriques complexes.

### 1.4.1 Diagnostic des défauts non francs sur une ligne simple

À l'heure actuelle, les méthodes de la réflectométrie dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel, présentées dans la section 1.1 permettent de détecter, caractériser et localiser les défauts francs. Cependant, elles ne sont pas utilisables généralement pour la détection des défauts non francs [45]. Dans [104, 103] les auteurs ont montré la difficulté d'identifier un défaut non franc (une fissure de la gaine diélectrique d'un câble) avant qu'il devienne un défaut franc.

La détection de ces défauts se complique du fait qu'un défaut non franc se traduit par une faible variation de l'impédance caractéristique de la ligne de transmission, éventuellement sans discontinuité d'impédance. En effet, dans une telle situation, la variation d'impédance entraîne une très petite réflexion qui peut être perdue dans le bruit des mesures. Diverses méthodes sont proposées pour pallier cette difficulté.

### 1.4.1.1 Méthodes utilisant des outils de traitement de signal et retournement temporel

Pour détecter les défauts non francs, une large communauté des chercheurs propose des méthodes de diagnostic qui utilisent des outils de traitement de signal afin de rendre les effets de défauts plus visibles dans les signaux (réflectogramme, courant-tension, ...). Parmi ces outils, nous distinguons, la décomposition en ondelettes, la transformée temps-fréquence de Wigner Ville.

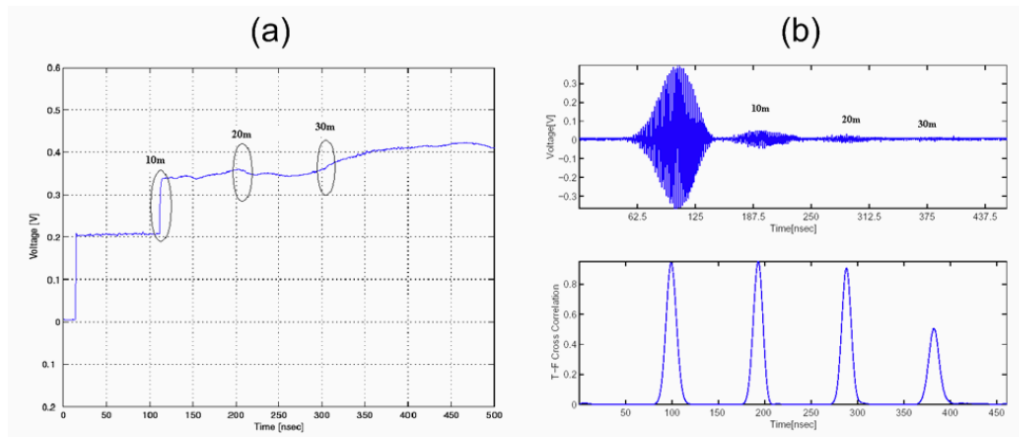


FIGURE 1.15 – Comparaison des performances de détection des défauts : (a) méthode TDR classique. (b) méthode JTFDR. (source : [84]).

**Décomposition en ondelettes :** La décomposition en ondelettes est un outil utilisé dans plusieurs domaines (notamment dans le domaine de l’astronomie et le domaine médical) pour effectuer une analyse multi-résolution des données et de débruiter les signaux [33, 4, 58]. Dans le contexte de la détection des défauts dans une ligne de transmission, la décomposition en ondelettes est appliquée initialement au réflectogramme obtenu dans le domaine temporel. On déduit les dégradations de la ligne à l’aide d’une deuxième décomposition en ondelettes [20, 19] appliquée sur une fenêtre temporelle du réflectogramme. Cette méthode a montré des résultats intéressants et l’enjeu de son application est de déterminer le type d’ondelette à utiliser.

**JTFDR :** La JTFDR<sup>7</sup> est une deuxième méthode de détection des défauts non francs, basée sur la transformée temps-fréquence de Wigner Ville. Elle a été proposée par Y.J Shin dans [83] et elle a été développée pour s’adapter aux caractéristiques du câble à diagnostiquer [30, 85].

La JTFDR est utilisée en trois étapes :

- Injection d’un signal de type *chirp* en fréquence comme illustré dans la Figure 1.7, défini de manière à minimiser les distorsions lors de sa propagation dans la ligne.

7. JTFDR=Joint Time Frequency Domain Reflectometry.

- Mesure du réflectogramme et calcul de sa transformée de Wigner Ville.
- Application d’une fonction d’intercorrélation temps-fréquence normalisée, dont les pics correspondent aux discontinuité du câble.

Dans [105, 106], les auteurs ont montré que la méthode JTFDR permet de détecter les défauts non francs dans les câbles coaxiaux. La Figure 1.15 montre la comparaison des performances de détection de défauts non francs sur un câble coaxial par la méthode de réflectométrie temporelle (TDR) et la méthode JTFDR.

**Méthode de détection basée sur le retournement temporel :** La technique du retournement temporel a été introduite en acoustique par M. Fink et ses collègues [38, 108, 21]. Elle est utilisée principalement pour concentrer efficacement l’énergie acoustique sur une cible, en utilisant les avantages de la propriété d’invariance de l’équation de propagation ou l’équation des ondes par rapport à la variable du temps.

La technique du retournement temporel a montré une grande précision dans la localisation d’objets dans le sol [62]. Récemment, plusieurs chercheurs ont été intéressés par l’application de cette technique au diagnostic des défauts de câbles électriques en adoptant la même approche [54]. En effet, toute discontinuité d’impédance caractéristique le long du câble en défaut, créée par un défaut non franc, se comporte comme une source secondaire qui génère une onde réfléchie et une onde transmise. On peut donc appliquer le processus du retournement temporel pour localiser ce changement de l’impédance par rapport un câble de référence [37]. Cette méthode de détection a été également étendue aux diagnostic des défauts des réseaux des lignes de transmission.

#### 1.4.1.2 Réflectométrie et Inverse Scattering

Les auteurs de [112, 96] ont appliqué la théorie de la transformation de l’inverse scattering (IST) [36, 48] associée au système des équations de Zakharov-Shabat (1.33), au diagnostic de défauts sur une ligne de transmission non uniforme. Ces travaux expliquent le lien entre les coefficients de scattering (coefficients de réflexion et de transmission) utilisés en pratique par des ingénieurs [8] et les objets mathématiques définis via les équations de Zakharov-Shabat (1.33)<sup>8</sup>.

La Figure 1.16 montre une comparaison des potentiels  $\tilde{q}_{\pm}$ <sup>9</sup> identifiés par la théorie de la transformation de l’inverse scattering et les simulations directe des paramètres  $RLGC$  de la ligne. Dans le cas sans perte ( $R(x) = 0$  et  $G(x) = 0$ ), cette méthode a montré des résultats très intéressants pour la détection des défauts non francs à partir des coefficients de scattering mesurés en pratique [57].

8. Ces coefficients de scattering sont introduits dans le chapitre 2.

9.  $\tilde{q}_{\pm}(x) = e^{\int_{x_l}^x q_{\pm}(s)ds}$  où  $q_{pm}$  sont introduits dans (1.31).

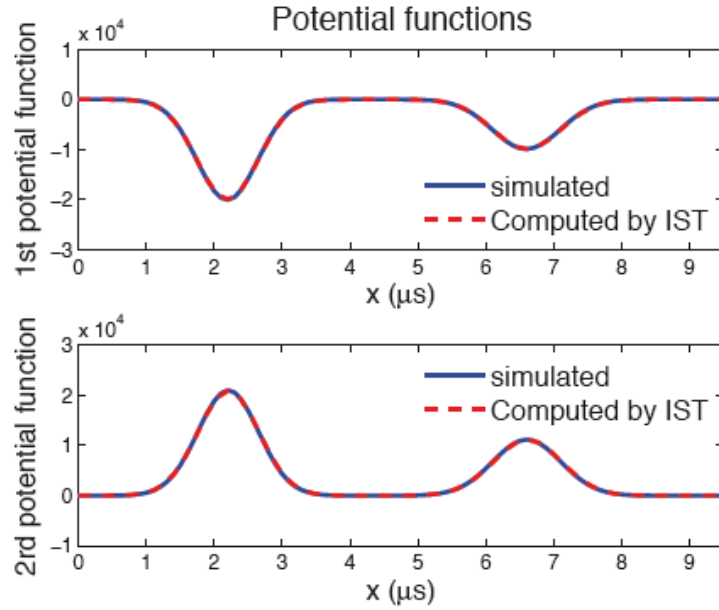


FIGURE 1.16 – Comparaison des potentiels  $\tilde{q}_{\pm}$  calculées par l'IST et simulation directe des paramètres RLGC (source : [96]).

#### 1.4.2 Diagnostic des défauts des réseaux électriques

Les méthodes classiques de TDR et FDR et les techniques de diagnostic présentés pour une ligne de transmission ont été utilisées également pour le diagnostic des défauts des réseaux électrique [7, 75]. Dans cette section nous nous intéressons à certaines méthodes dédiées spécialement au diagnostic des défauts des réseaux.

**Retournement temporel et Impulsion Adaptée (MP) :** La technique du retournement temporel est utilisée également pour localiser les défauts d'un réseau complexe. Les auteurs de [76, 61] ont développé une méthode distribuée non-itérative capable de synthétiser des signaux de test se focalisant directement sur la position du défaut. Elle consiste en deux étapes : la première étant la synthèse des signaux de test en adaptant la méthode DORT (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel) [60, 38] à la propagation guidée, la deuxième étant l'élaboration d'un algorithme de post-traitement qui permet la localisation directe des défauts.

Lors de l'application de TDR et FDR classiques, l'adaptation du signal de test au réseau sous test dépendra de la configuration du système sans devoir être prédéfini. Afin d'améliorer la détection des défauts non-francs, les auteurs de [1, 2] proposent un nouveau type de signal, nommé *impulsion adaptée* (MP)<sup>10</sup>, qui est plus performante lorsque le système est plus complexe, c'est-à-dire lorsque sa réponse est plus

10. Matched Pulse en anglais



riche en échos.

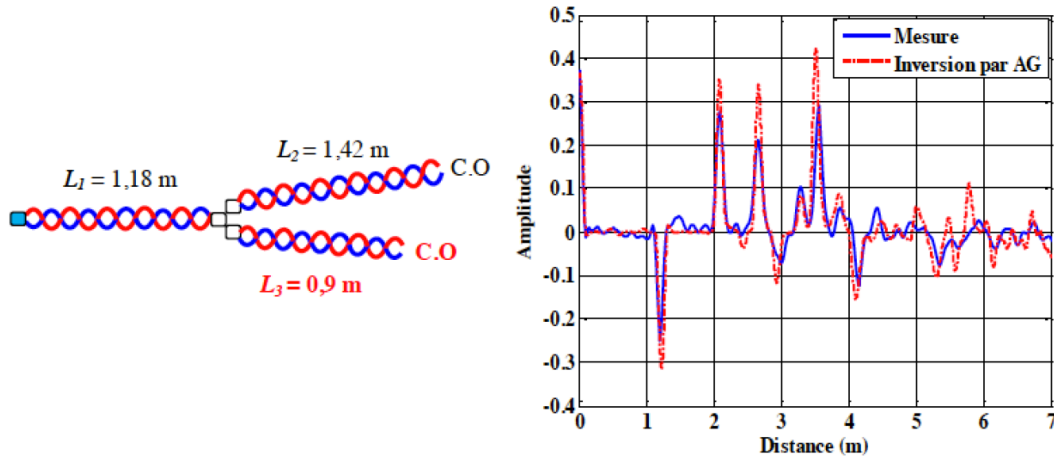


FIGURE 1.17 – Comparaison des réflectogrammes mesuré et celui obtenu par inversion AG (source :[90]).

**Algorithme génétique et réseaux neurones :** M.K Smail [90] a développé des méthodologies dédiées à la réflectométrie en vue du diagnostic filaire. Il a proposé une solution qui consiste à combiner un modèle de propagation filaire avec deux méthodes de résolution de problème inverses : les algorithmes génétiques (AG) [93] et les réseaux de neurones (RN) [89].

Lors de l'utilisation de ces méthodes itératives d'inversion, on essaie de remonter à la position du défaut en analysant le réflectogramme qui représente la réponse du réseau en utilisant une base de données contenant plusieurs configurations possible du réseau en défaut.

Cette approche a été conduite pour différentes configurations de réseaux (réseaux en Y, réseaux en arbres). La Figure 1.17 représente la comparaison du réflectogramme mesuré et celui obtenu par la méthode d'inversion AG.

Les méthodes itératives d'inversion ont besoin de beaucoup de temps de calcul pour la convergence vers une solution et elles peuvent trouver une solution ne correspondant pas à la position réelle du défaut (comme c'est le cas pour les algorithmes de minimisation locale).

**Réflectométrie et inverse scattering :** Dans le contexte de l'utilisation de la transformation de l'inverse scattering pour le diagnostic des défauts des réseaux électriques, F. Commandini a apporté, dans le cadre de sa thèse [101], des résultats théoriques sur l'identification des longueurs des branches des réseaux électriques en étoiles non uniformes [102]. Sous certaines hypothèses sur les caractéristiques des branches, il a établi également un résultat sur l'identifiabilité des coefficients de pertes (voir chapitre 4). Dans la suite, nous présentons quelques méthodes de diagnostic de pannes dans des systèmes dynamiques d'ordre fini.

### 1.5 Diagnostic de pannes dans des systèmes dynamiques d'ordre fini

Le diagnostic de pannes pour des systèmes d'ingénierie en général a été largement étudié dans la littérature depuis plusieurs décennies. La plupart de ces publications concernent les systèmes dynamiques modélisés par des modèles d'état d'ordre fini ou par des fonctions de transfert rationnelles. Dans un réseau électrique filaire, chaque branche est modélisée dans cette thèse par les équations des télégraphistes qui sont équivalentes à un modèle d'état d'ordre infini. En discrétisant l'espace, on pourrait l'approcher par un modèle d'état d'ordre fini, mais il faudrait un ordre très élevé pour les bandes de fréquences habituellement utilisées en diagnostic de réseaux filaires. Les méthodes de cette littérature généraliste semblent donc peu utiles pour le cas étudié dans cette thèse. Toutefois, pour rendre ce chapitre d'introduction plus complet, nous allons rappeler brièvement les méthodes principales dans cette littérature.

Cette section n'a pas pour but de passer en revue une majorité des publications dans ce domaine, néanmoins nous pouvons citer quelques ouvrages consacrés à ce sujet pour montrer l'ampleur des contributions [10, 43, 25, 35, 47, 51, 16, 87]. Les méthodes de diagnostic les plus primitives sont basées sur la redondance physique, en se basant sur un mécanisme de vote entre des composants dupliqués. Des contraintes pratiques et économiques font que les applications sont largement dominées par des méthodes à base de redondance analytique, dites aussi à base de modèles. Il existe aussi des méthodes par classification de données. Nous allons détailler ces méthodes un peu plus par la suite.

#### 1.5.1 Méthodes par génération et évaluation de résidus

Le modèle mathématique d'un système physique peut être vu comme une copie virtuelle du système. En les alimentant par la même entrée, on espère que les deux systèmes, le vrai et le virtuel, produisent la même sortie. La différence entre les deux sorties, appelée "résidu" (dans sa version la plus simple) peut donc être utilisée pour détecter des anomalies dans le système. En pratique des méthodes plus avancées sont souvent utilisées pour concevoir des résidus, notamment pour prendre en compte le fait que certains états du système ne sont pas directement observés. Ces méthodes sont basées sur l'analyse de l'espace de parité [26, 44], des observateurs d'état ou des algorithmes de filtrage [24, 80, 113]. Pour le besoin de diagnostic (décider laquelle ou lesquelles pannes sont présentes), un ensemble de résidus est utilisé, dont chacun est sensible à un sous-ensemble des pannes à surveiller.

A cause des incertitudes de modélisation et d'observation, même en l'absence de toute panne, un résidu est typiquement non nul. Il est donc important d'élaborer des méthodes d'évaluation de résidus, pour décider s'ils sont significativement non nuls. Les méthodes les plus souvent utilisées sont statistiques ou ensemblistes [9, 73].

### 1.5.2 Méthodes par estimation de paramètres

Si les pannes à surveiller sont modélisées par des changements de paramètres, il est naturel d'appliquer des méthodes d'estimation de paramètres pour leurs détection et diagnostic [46, 17]. On estime régulièrement les paramètres du système surveillé pour les comparer à leurs valeurs de référence ou analyser leur évolution dans le temps. Il est donc important d'appliquer des algorithmes d'estimation autonomes et en temps réel. Une des difficulté est liée au fait que certains états du systèmes ne sont pas directement observés. Les observateurs adaptatifs permettent de résoudre efficacement certains problèmes de cette nature [109, 110]. Une autre difficulté est encore à cause des incertitudes dans la modélisation et les observations, qui rendent la comparaison des paramètres non triviale [18]. Ici aussi les méthodes statistiques ou ensemblistes peuvent être utilisées pour la prise de décision [9, 73].

### 1.5.3 Méthodes par classification de données

Quand on ne dispose pas de modèle a priori, il est possible d'appliquer les méthodes de classification pour analyser les données observées sur le système surveillé pour décider si une ou plusieurs pannes supposées sont présentes [70, 23, 63]. Les règles de classification sont généralement apprises à partir d'une grande base de données enregistrées sur le système à surveiller, qui remplace en quelque sorte le modèle mathématique. La difficulté principale est liée aux contraintes pratiques quand on collecte ces données, non seulement quand le système se trouve dans son état nominal, mais aussi dans chacun de ses états de défaillance possibles. En raison de la dynamique du système, la classification basée sur les observations bruitées doit être effectuée dans un espace de grande dimension. Alternativement, la classification peut être effectuée sur les résidus générés à l'aide d'un modèle mathématique avec des méthodes mentionnées plus haut. L'avantage est que la classification s'opère typiquement dans un espace de faible dimension, mais au prix de requérir un modèle a priori. Ceci rejoint les méthodes pour l'évaluation de résidus.

## 1.6 Introduction aux travaux réalisés

Les méthodes classiques de la réflectométrie (TDR et FDR), ainsi que les méthodes utilisant les outils de traitement de signal ou la technique du retournement temporel, ne sont pas aptes à détecter les défauts dans toutes les géométrie des réseaux électriques. En effet, pour certaines méthodes, la géométrie complexe du réseau provoque une grande ambiguïté pour la localisation ou la caractérisation des défauts.

Au cours de cette thèse, nous développons des modèles mathématiques des réseaux électriques (modèles directs) et nous présentons des approches pour la détection des défauts des réseaux électriques complexe (problèmes inverses).

### 1.6.1 Contributions dans le problème direct

#### **Modèle réduit de la réflectométrie pour les réseaux électriques en arbres :**

Dans cette première étude du problème direct, nous présentons un modèle réduit de la réflectométrie qui caractérise les réseaux électriques en arbre avec les paramètres linéiques *RLGC* des branches. Nous allons généraliser la modélisation d'une ligne de transmission simple, qui consiste à calculer le coefficient de réflexion via la résolution d'une équation différentielle de Riccati, à un réseau électrique en arbre.

Dans un premier temps, nous présentons les étapes de calculs du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile, ensuite, nous étendons ces étapes de calcul à un réseau en arbre.

La méthode de calcul du coefficient de réflexion par la résolution des équations différentielles de Riccati est numériquement efficace et a été validée en comparant des simulations numériques du coefficient de réflexion et des mesures réelles.

#### **Automatisation des calculs des solutions de l'équation de *BLT* avec des branches de réseau non uniformes :**

Toujours dans le cadre de la résolution du problème direct, nous allons étendre l'équation de BLT, qui se réfère aux trois auteurs (C.E.Baum, T.K.Liu et F.Tesche) auteurs de l'article [13] dans lequel ils ont modélisé les réseaux des câbles multi-conducteurs uniformes. L'équation Baum-Liu-Tesche (BLT) est largement utilisée pour la modélisation et l'analyse des réseaux de lignes de transmission complexes. Elle est d'origine pour les réseaux de lignes de transmission uniformes et elle a été généralisée dans [11] par les mêmes auteurs pour le cas non uniforme.

Vu l'avantage principal du formalisme de cette équation qui est sa grande souplesse qui permet de modifier facilement les réseaux de topologie complexe, d'autres auteurs ont travaillé sur sa généralisation pour des réseaux non uniformes [74, 12].

Pour résoudre l'équation de BLT, les matrices caractéristiques des branches et des noeuds du réseau doivent être auparavant calculées. Cependant, il n'est pas indiqué dans les travaux réalisés dans le cas non uniforme une manière permettant de calculer ces matrices à partir de la spécification structurelle d'un réseau et des paramètres caractéristiques non uniforme des lignes de transmission constituant le réseau. Dans cette étude du problème direct, nous présentons une méthode entièrement automatisée pour les calculs des matrices caractéristiques des branches et des noeuds à partir de la spécification de la structure topologique du réseau et des paramètres caractéristiques *RLGC* non uniformes de l'ensemble des lignes de transmission.

La méthode de calcul automatisée que nous proposons est grandement simplifiée grâce à des conventions locales bien définies. Egaleme nt nous avons introduit une nouvelle convention pour les notations impliquées dans l'équation de BLT généralisée pour faciliter la mise en œuvre de l'approche automatisée de simulation de réseau à travers la construction et sa résolution numérique.

### 1.6.2 Contribution dans la résolution du problème inverse

**Méthode itérative d'inversion pour des réseaux en étoiles :** Dans cette étude, nous nous restreindrons aux réseaux électriques en étoiles, formés des lignes de transmission uniformes avec pertes, pour étudier le problème inverse dont l'objectif est d'estimer le nombre de branches, les longueurs et les coefficients de pertes des branches  $B_{m-n}$  de réseau en étoile [101].

Afin d'atteindre notre objectif, nous allons utiliser une méthode itérative qui utilise l'admittance du réseau en étoile au noeud central  $Y_{ap_{N_2}}$ , définie ci-dessous :

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) := \sum_{m \in \mathcal{E}^o \setminus \{1\}} Y_{ap_{2-m}}(\omega) \quad (1.46)$$

où  $Y_{ap_{2-m}}$  représente l'admittance apparente de la branche  $B_{m-n}$  au noeud central ( $N_2$  étant le noeud central).

L'idée de la méthode itérative que nous proposons est de considérer le fait que, d'une part, l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  qui se décompose en une somme dont chaque terme correspond à une branche, et d'autre part, d'utiliser la relation existante entre les pulsations qui correspondent aux maximums des pics apparus dans la courbe de la partie réelle de  $Y_{ap_{N_2}}$  et les longueurs en distances électriques des branches de réseau. Lors de la validation de la présente méthode itérative par des simulations numériques, nous avons généré l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  au noeud par le simulateur dédié au calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en arbre.

**Etude du problème inverse via l'équation des tensions :** Cette deuxième étude du problème inverse est dédiée aux réseaux électriques de topologie plus générale avec des branches non uniformes et elle se base sur l'utilisation de *l'équation des tensions* qui exprime les tensions aux noeuds du réseau en fonction des caractéristiques des branches et des noeuds.

Cette équation est similaire à l'équation de BLT qui est vérifiée par les ondes de puissance entrantes dans les extrémités des branches. En effet, des variantes de l'équation de BLT peuvent être déduites en remplaçant les ondes de puissances par des ondes de tension ou de courant.

Le choix des ondes de tensions a été fait en raison d'une propriété de la matrice d'admittance du réseau que nous allons exploiter pour formuler et résoudre un problème inverse.

L'objectif de cette étude est d'identifier, au moins partiellement, la matrice d'admittance de chaque branche du réseau à partir de la matrice d'admittance globale du réseau, qui peut être déduite d'un certain nombre d'expériences faites aux noeuds. Pour se mettre dans les conditions classiques de l'expérience de la réflectométrie, nous supposons que les sources sont ponctuelles et toujours connectées aux noeuds d'un réseau. Nous supposons également que les noeuds du réseau sont modélisés par le modèle équivalent de Thévenin [69].

La particularité de cette étude est de se baser sur des mesures de tension à l'ensemble des noeuds du réseau sans avoir accès aux courants dans les branches du

réseau.

Afin de valider cette méthode, nous testons la résolution du problème inverse avec des tensions simulées par le simulateur dédié à la résolution de l'équation de BLT non uniforme.

## 1.7 Conclusion

La problématique de diagnostic et l'état de l'art présentés dans ce chapitre justifient notre intérêt à développer de nouvelles méthodes pour le diagnostic des défauts des réseaux de câbles électriques complexes. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons besoin d'étudier la modélisation de réseaux électriques (problème direct) à la base des méthodes de diagnostic (problème inverse).



# Caractère bien posé des équations de ZS et paramètres de scattering

## 2.1 Introduction

Nous considérons une ligne de transmission non uniforme avec perte, similaire à la ligne décrite dans la Section 1.2.1.1. La seule différence, dans ce chapitre, est que nous supposons que cette ligne est éclairée par des ondes électromagnétiques [22]. Comme dans l'équation de BLT [13], ces ondes sont traduites par des sources de tension  $V^s$  et de courant  $I^s$  distribuées le long de la ligne comme elles sont illustrées dans la Figure 2.1. Dans les réseaux des lignes de transmission simples ou multi-conducteurs, ces ondes électromagnétiques traduisent les effets de la diaphonie [78], causée par les phénomènes d'induction électromagnétique. La propagation de la tension  $V$  et du courant  $I$  est décrite par les équations générales des télégraphistes, dans le domaine fréquentiel [71, 64], suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dV(\omega, z)}{dz} = -Z_L(\omega, z)V(\omega, z) + V^s(\omega, z) \\ \frac{dI(\omega, z)}{dz} = -Y_T(\omega, z)V(\omega, z) + I^s(\omega, z) \end{cases}, \forall z \in ]z_l, z_r[ \quad (2.1)$$

Aux deux extrémités de la ligne, nous avons les conditions aux bords (1.9).

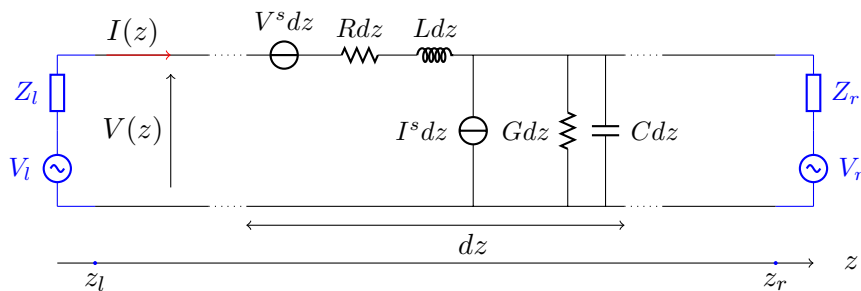


FIGURE 2.1 – Description d'une ligne de transmission

Dans ce chapitre, nous considérons les ondes de puissance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  définies par (1.28) et nous définissons deux sources combinées  $\nu_1^s$  et  $\nu_2^s$  en termes de la tension



$V^s$  et du courant  $I^s$  par :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\nu_1^s(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V^s(\omega, x) - \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I^s(\omega, x) \quad (2.2)$$

$$\nu_2^s(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V^s(\omega, x) + \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I^s(\omega, x) \quad (2.3)$$

En utilisant les équations générales des télégraphistes obtenues après l'utilisation de la transformation de Liouville (1.23), nous montrons que les ondes de puissance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  vérifient les équations des de Zakharov-Shabat, avec des termes supplémentaires au second membre par rapport aux équations (1.30) introduites au chapitre précédent, suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_1(\omega, x)}{dx} - j\omega\nu_1(\omega, x) = q_d(x)\nu_1(\omega, x) - q_+(x)\nu_2(\omega, x) + c_0(x)\nu_1^s(\omega, x) \\ \frac{d\nu_2(\omega, x)}{dx} + j\omega\nu_2(\omega, x) = -q_d(x)\nu_2(\omega, x) - q_-(x)\nu_1(\omega, x) + c_0(x)\nu_2^s(\omega, x) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $c_0(x) = 1/\sqrt{L(x)C(x)}$ . Les fonctions de potentiel  $q_d(x)$  et  $q_\mp(x)$  sont définies comme dans (1.31), en fonction des paramètres linéiques  $R(x)$ ,  $L(x)$ ,  $C(x)$  et  $G(x)$ . Aux deux extrémités de la ligne  $x_l$  et  $x_r$ , les ondes de puissance sont décrites par les conditions aux bords (1.34).

Dans le présent chapitre, nous étudions le caractère bien posé du système des équations différentielles (2.4) et les conditions aux bords (1.34). Ensuite, nous allons introduire les paramètres de scattering d'une ligne de transmission et certaines matrices caractéristiques. Dans la suite, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

**H 1.** Les paramètres de la ligne de transmission  $R(x)$ ,  $L(x)$ ,  $G(x)$  et  $C(x)$  sont des fonctions dérivables presque partout sur  $[x_l, x_r]$  tels que ,  $\forall x \in [x_l, x_r]$   $L(x) > 0$ ,  $C(x) > 0$ ,  $R(x) \geq 0$ ,  $G(x) \geq 0$ .

**H 2.** Les impédances de charges  $Z_l$  et  $Z_r$  sont passives, c'est-à-dire,

$$\forall \omega > 0, \quad \Re Z_l(\omega) \geq 0; \quad \Re Z_r(\omega) \geq 0 \quad (2.5)$$

**H 3.** Les fonctions potentiels  $q_\pm(x)$  et  $q_d(x)$  sont bornés et continues presque partout sur  $[x_l, x_r]$ .

## 2.2 Équations de ZS et matrices caractéristiques d'une ligne

Le système des équations différentielles (2.4-1.34) représente un problème différentiel aux deux bouts. Cela signifie que le système différentiel doit satisfaire les conditions aux deux extrémités de la ligne de transmission. Un problème aux deux bouts généralement est beaucoup plus difficile à résoudre qu'un problème de Cauchy qui doit satisfaire des conditions aux bords à une seule extrémité. Dans cette section, nous étudions le caractère bien posé du système des équations de ZS et nous introduisons les matrices caractéristiques d'une ligne de transmission simple.

### 2.2.1 Caractère bien posé des équations de ZS

**Proposition 1.** *Sous les hypothèses **H1**, **H2** et **H3**, le système d'équations différentielles (2.4) avec les conditions aux bords (1.34) admet une solution, pour tout  $x \in [x_l, x_r]$ . En présence des pertes, c'est à dire,  $R(x) > 0$  et/ou  $G(x) > 0$ , cette solution est unique.*

**Preuve de la Proposition 1.** Dans le cas de l'absence des sources de tensions  $V^s$  et de courants  $I^s$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in [x_l, x_r]$ ,  $\nu_2^s(\omega, x) = \nu_2^s(\omega, x) = 0$ , la Proposition 1 a été démontrée dans [101]. Dans la présente démonstration, nous considérons le second membre des équations de ZS et nous montrons l'existence<sup>1</sup> et l'unicité de la solution en présence des pertes.

D'après le principe de superposition des solutions des équations différentielles linéaires [32], nous exprimons la solution du problème aux deux bouts (2.4-1.34) comme une combinaison linéaire de deux solutions du système de ZS (2.4) avec les deux conditions aux bords, demi-homogènes, suivantes :

- Absence de la source de tension  $V_r$  à l'extrémité  $x_r$  :

$$\begin{cases} \nu_1(\omega, x_r) - \rho_r(\omega)\nu_2(\omega, x_r) = 0 \\ \nu_2(\omega, x_l) - \rho_l(\omega)\nu_1(\omega, x_l) = (1 - \rho_l(\omega))\nu_{2l}(\omega) \end{cases} \quad (2.6)$$

- Absence de la source de tension  $V_l$  à l'extrémité  $x_l$  :

$$\begin{cases} \nu_1(\omega, x_r) - \rho_r(\omega)\nu_2(\omega, x_r) = (1 - \rho_r(\omega))\nu_{1r}(\omega) \\ \nu_2(\omega, x_l) - \rho_l(\omega)\nu_1(\omega, x_l) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous allons démontrer la Proposition 1 en deux étapes : dans un premier temps, nous montrons l'existence des solutions du problème (2.4-2.7) en utilisant la technique du plongement invariant. Dans un second temps, nous étudions l'unicité de la solution à travers les équations des télégraphistes.

**Existence de solution :** Considérons le problème aux deux bouts (2.4-2.7). Nous utilisons la méthode du plongement invariant<sup>2</sup> présentée par Bellman [14, 15] qui nous permet de triangulariser un système d'équations différentielles couplées.

Par le principe de plongement invariant, nous introduisons deux fonctions  $r_l(x)$  et  $p_l(x)$  solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dr_l(\omega, x)}{dx} = q_-(x)r_l^2(\omega, x) + 2(q_d(x) + j\omega)r_l(\omega, x) - q_+(x) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_l(\omega, x)}{dx} &= \left( q_d(x) + j\omega + r_l(\omega, x)q_-(x) \right) p_l(\omega, x) \\ &+ c_0(x) \left( \nu_1^s(\omega, x) - r_l(\omega, x)\nu_2^s(\omega, x) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

1. Le fait de considérer  $V^s$  et  $I^s$  rend la démonstration non triviale.

2. La méthode de plongement invariant est utilisée souvent pour résoudre un problème aux deux bouts. Dans notre contexte, nous utilisons cette technique pour montrer l'existence de solution du problème aux deux bouts.

avec les conditions aux bords suivantes :

$$r_l(\omega, x_r) = \rho_r(\omega), \quad p_l(\omega, x_r) = 0 \quad (2.10)$$

Par ailleurs, nous vérifions que les fonctions  $r_l(x)$  et  $p_l(x)$  vérifient la relation suivante :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad \nu_1(\omega, x) = r_l(\omega, x)\nu_2(\omega, x) + p_l(\omega, x) \quad (2.11)$$

Cette relation est dite la *généralisation de la transformation de Riccati* [79]. D'après la Proposition 1 de la thèse de F.Visco-Comandini [101], l'équation différentielle de Riccati (2.8) admet une solution unique  $r_l(\omega, x)$  dans l'intervalle  $[x_l, x_r]$ . De plus, nous avons,

$$\text{Si } |\rho_r(\omega)| \leq 1 \text{ alors } \forall x \in [x_l, x_r] \quad |r_l(\omega, x)| \leq 1 \quad (2.12)$$

$$1 - \rho_l(\omega)r_l(\omega, x) \neq 0 \quad (2.13)$$

D'après la relation (2.12) et l'hypothèse **H3**, sur la régularité des potentiels  $q_\pm$  et  $q_d$ , le problème de Cauchy vérifié par  $p_l$  admet également une solution unique pour tout  $x \in [x_l, x_r]$ . Nous remarquons qu'en absence des sources distribuées  $V^s$  et  $I^s$ , la solution  $p_l$  est identiquement nulle.

En utilisant l'égalité (2.11) dans l'équation différentielle vérifiée par  $\nu_2$  dans le système des équations de ZS. Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\nu_2(\omega, x)}{dx} = -\left(q_d(x) + j\omega + q_-r_l(\omega, x)\right)\nu_2(\omega, x) - q_-(x)p_l(\omega, x) + c_0(x)\nu_2^s(\omega, x) \quad (2.14)$$

avec la condition au bord suivante :

$$\nu_2(\omega, x_l) = \frac{(1 - \rho_l(\omega))\nu_{2l}(\omega) + \rho_l(\omega)p_l(\omega, x_l)}{1 - \rho_l(\omega)r_l(\omega, x_l)} \quad (2.15)$$

D'après (2.13), le problème de Cauchy (2.14-2.15) admet une solution unique  $\nu_2(\omega, x)$  pour tout  $x \in [x_l, x_r]$ . L'existence de la solution  $\nu_1(\omega, x)$  avec  $x \in [x_l, x_r]$  résulte de la relation (2.11).

Avec le même principe, nous montrons que le problème aux deux bouts (2.4-2.7) admet une solution. En effet, nous introduisons les deux fonctions  $r_r$  et  $p_r$  solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dr_r(\omega, x)}{dx} = q_-(x)r_r^2(\omega, x) + 2(q_d(x) + j\omega)r_r(\omega, x) - q_+(x) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_r(\omega, x)}{dx} &= \left(q_d(x) + j\omega + r_r(\omega, x)q_-(x)\right)p_r(\omega, x) \\ &+ c_0(x)\left(\nu_1^s(\omega, x) - r_r(\omega, x)\nu_2^s(\omega, x)\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$r_r(\omega, x_l) = \rho_l(\omega), \quad p_r(\omega, x_l) = 0 \quad (2.18)$$

et par ailleurs, nous montrons qu'elles vérifient la relation suivante :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad \nu_2(\omega, x) = r_r(\omega, x)\nu_1(\omega, x) + p_r(\omega, x) \quad (2.19)$$

Via une méthode constructive, nous avons montré l'existence d'une solution du problème aux deux bouts (2.4-1.34). Maintenant, nous allons montrer l'unicité de cette solution.

**Unicité de la solution :** L'unicité de la solution des équations des télégraphistes implique l'unicité de la solution des équations de ZS en raison de leur relation (1.28). Considérons le système des équations des télégraphistes obtenues après l'application de la transformation de Liouville sur le système des équations (2.4) (système des équations (1.24) avec un second membre). Nous multiplions l'équation différentielle en  $V$  par le conjugué complexe de  $I$ , noté  $I^*$ , et le conjugué complexe de l'équation différentielle en  $I$  par la tension  $V$ , nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :  $\forall x \in ]x_l, x_r[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dV(\omega, x)}{dx} I^*(\omega, x) &= -\left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right) \zeta_\infty(x) |I(\omega, x)|^2 \\ &+ c_0(x) V^s(\omega, x) I^*(\omega, x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI^*(\omega, x)}{dx} V(\omega, x) &= -\left(\frac{G(x)}{C(x)} - j\omega\right) \zeta_\infty^{-1}(x) |V(\omega, x)|^2 \\ &+ c_0(x) I^s(\omega, x) V(\omega, x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $|\cdot|$  représente le module d'un nombre complexe. En sommant les deux équations différentielles, nous obtenons le système différentielle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dP(\omega, x)}{dx} &= -\left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right) \zeta_\infty(x) |I(\omega, x)|^2 - \left(\frac{G(x)}{C(x)} - j\omega\right) \zeta_\infty^{-1}(x) |V(\omega, x)|^2 \\ &+ c_0(x) \left( I^s(\omega, x) V(\omega, x) + V^s(\omega, x) I^*(\omega, x) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $P(\omega, x)$  représente la puissance électrique qui est définie par,

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad P(\omega, x) = V(\omega, x) I^*(\omega, x) \quad (2.23)$$

Soient  $[V_1(\omega, x) \ I_1(\omega, x)]^T$ ,  $[V_2(\omega, x) \ I_2(\omega, x)]^T$  deux solutions des équations des télégraphistes. Nous définissons deux variables  $\Delta V$  et  $\Delta I$  telles que  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\Delta V(\omega, x) = V_1(\omega, x) - V_2(\omega, x) \quad (2.24)$$

$$\Delta I(\omega, x) = I_1(\omega, x) - I_2(\omega, x) \quad (2.25)$$

Ces nouvelles variables vérifient le système différentiel suivant :  $\forall x \in ]x_l, x_r[$ ,

$$\begin{cases} \frac{d\Delta V(\omega, x)}{dx} = -\left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right) \zeta_\infty(x) \Delta I(\omega, x) \\ \frac{d\Delta I(\omega, x)}{dx} = -\left(\frac{G(x)}{C(x)} + j\omega\right) \zeta_\infty^{-1}(x) \Delta V(\omega, x) \end{cases} \quad (2.26)$$

Nous associons à  $\Delta V$  et  $\Delta I$  la puissance électrique  $\Delta P(\omega, x) = \Delta V(\omega, x)\Delta I^*(\omega, x)$  qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\Delta P(\omega, x)}{dx} = -\left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right)\zeta_\infty(x)|\Delta I(\omega, x)|^2 - \left(\frac{G(x)}{C(x)} - j\omega\right)\zeta_\infty^{-1}(x)|\Delta V(\omega, x)|^2$$

En intégrant cette équations entre  $x_l$  et  $x_r$ , nous obtenons la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta P(\omega, x_r) - \Delta P(\omega, x_l) = \\ - \int_{x_l}^{x_r} \left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right)\zeta_\infty(x)|\Delta I(\omega, x)|^2 + \left(\frac{G(x)}{C(x)} - j\omega\right)\zeta_\infty^{-1}(x)|\Delta V(\omega, x)|^2 dx \end{array} \right.$$

Puisque les deux couples de solutions  $(V_1, I_1)$  et  $(V_2, I_2)$  vérifient les mêmes conditions aux bords (1.25), nous avons,

$$\Delta P(\omega, x_r) = \Delta P(\omega, x_l) = 0$$

Donc, l'équation intégrale précédente devient,

$$\int_{x_l}^{x_r} \left[ \left(\frac{R(x)}{L(x)} + j\omega\right)\zeta_\infty(x)|\Delta I(\omega, x)|^2 + \left(\frac{G(x)}{C(x)} - j\omega\right)\zeta_\infty^{-1}(x)|\Delta V(\omega, x)|^2 \right] dx = 0 \quad (2.27)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'expression (2.27), nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\int_{x_l}^{x_r} \frac{R(x)}{L(x)}\zeta_\infty(x)|\Delta I(\omega, x)|^2 + \frac{G(x)}{C(x)}\zeta_\infty^{-1}(x)|\Delta V(\omega, x)|^2 dx = 0 \quad (2.28)$$

$$\int_{x_l}^{x_r} \zeta_\infty(x)|\Delta I(\omega, x)|^2 - \zeta_\infty^{-1}(x)|\Delta V(\omega, x)|^2 dx = 0 \quad (2.29)$$

L'unicité des solutions des équations des télégraphistes se discute selon les valeurs des termes de pertes ( $R(x)$  et  $G(x)$ ). Nous distinguons les cas suivants :

- Si  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,  $R(x) > 0$ ,  $G(x) > 0$  : d'après l'équation (2.28) et sous hypothèse **H1**, nous avons,

$$|\Delta I(\omega, x)|^2 = 0, \quad |\Delta V(\omega, x)|^2 = 0 \quad \forall x \in [x_l, x_r] \quad (2.30)$$

d'où l'unicité des solutions des équations des télégraphistes, c'est-à-dire,

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad I_1(\omega, x) = I_2(\omega, x), \quad V_1(\omega, x) = V_2(\omega, x) \quad (2.31)$$

Nous remarquons que la relation (2.30) vérifie également la relation (2.29).

- Si  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,  $R(x) = 0$ ,  $G(x) > 0$  : d'après l'équation (2.28), nous avons,

$$|\Delta V(\omega, x)|^2 = 0 \Rightarrow V_1(\omega, x) = V_2(\omega, x) \quad (2.32)$$

En remplaçant (2.32) dans (2.29), nous obtenons,

$$|\Delta I(\omega, x)|^2 = 0 \Rightarrow I_1(\omega, x) = I_2(\omega, x) \quad (2.33)$$

d'où l'unicité des solutions.

- Si  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,  $R(x) > 0$ ,  $G(x) = 0$  : d'après l'équation (2.28), nous avons,

$$|\Delta I(\omega, x)|^2 = 0 \Rightarrow I_1(\omega, x) = I_2(\omega, x) \quad (2.34)$$

En remplaçant (2.34) dans (2.29), nous obtenons,

$$|\Delta V(\omega, x)|^2 = 0 \Rightarrow V_1(\omega, x) = V_2(\omega, x) \quad (2.35)$$

d'où l'unicité des solutions.

- Si  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,  $R(x) = 0$ ,  $G(x) = 0$  : dans ce cas, la relation (2.28) est toujours vérifiée. Cependant, la relation (2.29) nous fournit l'égalité suivante :

$$\int_{x_l}^{x_r} \zeta_\infty(x) |\Delta I(\omega, x)|^2 dx = \int_{x_l}^{x_r} \zeta_\infty^{-1}(x) |\Delta V(\omega, x)|^2 dx \quad (2.36)$$

Cette égalité n'implique pas les égalités de (2.30). Donc, dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure l'unicité des solutions des équations des télégraphistes.

D'après la relation de changement de variables (1.28), nous avons montré l'unicité des solutions des équations de ZS sous l'hypothèse suivante :

**H 4.** *La ligne de transmission contient des pertes. En effet, pour tout  $x \in [x_l, x_r]$ , les deux paramètres linéiques  $R(x)$  et  $G(x)$  ne s'annulent pas simultanément.*

$$R(x) > 0 \text{ (et \textit{ou} } G(x) > 0$$

□

### 2.2.2 Matrices caractéristiques d'une ligne de transmission

Précédemment, dans cette section, nous avons étudié le caractère bien posé du problème aux deux bouts (2.4-1.34). Maintenant nous allons introduire les différentes matrices caractéristiques d'une ligne de transmission. Dans les prochains chapitres, nous associons ces matrices caractéristiques à chaque branche  $B_{m-n}$  d'un réseau électrique  $\mathcal{G}$ .

### 2.2.2.1 Matrice de scattering

D'après la linéarité du problème aux limites (2.4), nous avons une dépendance linéaire entre les ondes entrantes et les ondes sortantes des extrémités de la ligne. À l'aide des relations scalaire (2.11) et (2.19) nous définissons la matrice de scattering  $S$ , associée à une ligne de transmission, ainsi :

**Définition 6.** Soient  $\nu_1, \nu_2$  solutions du problème aux deux bouts (2.4-1.34). Nous définissons la matrice de scattering  $S$  par :

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x_l) \\ \nu_2(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega) & s_{l,r}(\omega) \\ s_{r,l}(\omega) & s_{r,r}(\omega) \end{bmatrix}}_{S(\omega)} \begin{bmatrix} \nu_2(\omega, x_l) \\ \nu_1(\omega, x_r) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega) \\ \iota_{r;l}(\omega) \end{bmatrix}}_{\iota_{l;r}} \quad (2.37)$$

où :

- $[\nu_1(\omega, x_l) \quad \nu_2(\omega, x_r)]^T$  et  $[\nu_2(\omega, x_l) \quad \nu_1(\omega, x_r)]^T$  représentent respectivement les vecteurs des ondes entrantes et sortantes des deux extrémités de la ligne.
- $\iota_{l;r}$  et  $\iota_{r;l}$  représentent respectivement les ondes des sources distribuées sortantes ramenées à l'extrémité gauche et droite de la ligne.
- $\iota_{l;r}$  représente le vecteur des ondes des sources distribuées sortantes ramenées aux deux extrémités de la ligne.

#### Remarque 14.

- la terminologie "ramenée" veut dire remplacer une source distribuée le long d'une ligne de transmission (ou d'une branche d'un réseau) par une source ponctuelle équivalente.
- Le double indice  $(l;r)$  est utilisé pour indiquer que la fonction est ramenée à l'extrémité  $x_l$ .
- Le double indice  $(l:r)$  est utilisé pour marquer que l'objet correspond à une ligne de transmission (ou à une branche d'un réseau) et l'inversion des deux indices indique essentiellement le même objet, à une certaine permutation près.

Les coefficients de la matrice de scattering  $s_{l,l}$  et  $s_{r,r}$  représentent respectivement les coefficients de réflexion à gauche et à droite. Les coefficients  $s_{l,r}$ ,  $s_{r,l}$  représentent respectivement les coefficients de transmission à gauche et à droite.

En absence des sources distribuées  $V^s$  et  $I^s$ , ils sont déterminés comme suite :

$$s_{r,l}(\omega) = \frac{\nu_1(\omega, x_l)}{\nu_2(\omega, x_l)} \Big|_{\nu_1(\omega, x_r)=0} ; \quad s_{r,r}(\omega) = \frac{\nu_2(\omega, x_r)}{\nu_1(\omega, x_r)} \Big|_{\nu_2(\omega, x_l)=0} \quad (2.38)$$

$$s_{l,r}(\omega) = \frac{\nu_1(\omega, x_l)}{\nu_1(\omega, x_r)} \Big|_{\nu_2(\omega, x_l)=0} ; \quad s_{l,l}(\omega) = \frac{\nu_2(\omega, x_r)}{\nu_2(\omega, x_l)} \Big|_{\nu_1(\omega, x_r)=0} \quad (2.39)$$

Dans la suite, nous allons présenter une méthode numérique, basée sur la résolution des équations différentielles, pour calculer la matrice  $S$  d'une ligne non uniforme. Dans le quatrième chapitre, nous utiliserons cette méthode numérique afin d'automatiser la résolution de l'équation de BLT non uniforme.

**Remarque 15.**

- Nous rappelons que  $x_l$  et  $x_r$  correspondent respectivement aux extrémités gauche et droite de la ligne de transmission.
- Le double indice d'un élément de la matrices de scattering indique les extrémités de la ligne qui sont reliées par cet élément.

**2.2.2.2 Matrice d'impédance - Matrice d'admittance**

Considérons les solutions uniques des équations de ZS. D'après les formules de changement de variables (1.28), et sous les hypothèses de la Proposition 1, le système des équations des télégraphiste admet également une solution unique. Elle est donnée, en fonction des ondes de puissance, comme suite :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad \begin{bmatrix} V(\omega, x) \\ I(\omega, x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x) & \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x) \\ -\zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) & \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

D'après la linéarité du problème aux limites (2.1-1.25), nous avons également une dépendance linéaire entre le courant et la tension aux deux extrémités de la ligne. Nous définissons la matrice d'impédance  $Z$  et la matrice d'admittance  $Y$  comme suite :

**Définition 7.** Soient  $V$  et  $I$  solutions du problème aux deux bouts (2.1-1.25). Nous définissons la matrice d'impédance  $Z$  par :

$$\begin{bmatrix} V(\omega, x_l) \\ V(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{l,l}(\omega) & z_{l,r}(\omega) \\ z_{r,l}(\omega) & z_{r,r}(\omega) \end{bmatrix}}_{Z(\omega)} \begin{bmatrix} I(\omega, x_l) \\ -I(\omega, x_r) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} V_{l;r}^s(\omega) \\ V_{r;l}^s(\omega) \end{bmatrix}}_{V_{l;r}^s} \quad (2.41)$$

La matrice d'admittance  $Y$  est définie par :

$$\begin{bmatrix} I(\omega, x_l) \\ -I(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{l,l}(\omega) & y_{l,r}(\omega) \\ y_{r,l}(\omega) & y_{r,r}(\omega) \end{bmatrix}}_{Y(\omega)} \begin{bmatrix} V(\omega, x_l) \\ V(\omega, x_r) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_{l;r}^s(\omega) \\ I_{r;l}^s(\omega) \end{bmatrix}}_{I_{l;r}^s} \quad (2.42)$$

Les vecteurs  $V_{l;r}^s$  et  $I_{l;r}^s$  représentent respectivement les vecteurs des sources de tensions et de courants distribuées ramenés aux extrémités de la ligne.

En absence des sources distribuées  $V^s$  et  $I^s$ , les éléments des matrices  $Z$  et  $Y$  peuvent être déterminés séparément, en fonction des courants et des tensions aux extrémités de la ligne. Concernant les éléments de la matrice d'impédance  $Z$ , nous avons :

$$z_{l,l}(\omega) = \frac{V(\omega, x_l)}{I(\omega, x_l)} \Big|_{I(\omega, x_r)=0} ; \quad z_{r,r}(\omega) = -\frac{V(\omega, x_r)}{I(\omega, x_r)} \Big|_{I(\omega, x_l)=0} \quad (2.43)$$

$$z_{l,r}(\omega) = -\frac{V(\omega, x_l)}{I(\omega, x_r)} \Big|_{I(\omega, x_l)=0} ; \quad z_{r,l}(\omega) = \frac{V(\omega, x_r)}{I(\omega, x_l)} \Big|_{I(\omega, x_r)=0} \quad (2.44)$$



D'après les homographies (1.28) et (2.40), la connaissance d'une des matrices caractéristiques de la ligne de transmission nous permet de connaître les autres matrices caractéristiques via les relations ci-dessous :

$$Y(\omega) = \left( \zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) + S(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) - S(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \right) \quad (2.45)$$

$$Z(\omega) = \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) - S(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \left( \zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) + S(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right) \quad (2.46)$$

$$S(\omega) = \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) + Y(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) - Y(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right) \quad (2.47)$$

$$S(\omega) = \left( Z(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) + \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \left( Z(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) - \zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right) \quad (2.48)$$

où la matrice diagonale  $\zeta_{l:r}$  contient les impédances caractéristiques, en haute fréquence,  $\zeta_{\infty}$  évaluées aux extrémités de la ligne. Elle est définie par :

$$\zeta_{l:r}(\omega) = \begin{bmatrix} \zeta_{\infty}(x_l) & 0 \\ 0 & \zeta_{\infty}(x_r) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Les relations qui définissent les conversions entre le vecteur des ondes  $\iota_{l:r}$ , les vecteurs des sources de tensions et de courants distribuées sont les suivantes :

$$I_{l:r}^s(\omega) = - \left( \zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) + S(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \iota_{l:r}(\omega) \quad (2.50)$$

$$V_{l:r}^s(\omega) = \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) - S(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} \iota_{l:r}(\omega) \quad (2.51)$$

$$\iota_{l:r}(\omega) = - \left( \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) + Y(\omega)\zeta_{l:r}^{\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} I_{l:r}^s(\omega) \quad (2.52)$$

$$\iota_{l:r}(\omega) = \left( Z(\omega)\zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) + \zeta_{l:r}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \right)^{-1} I_{l:r}^s(\omega) \quad (2.53)$$

Dans [41], nous avons des conversions entre les matrices caractéristiques d'un quadripôle dans le cadre d'une autre homographie entre le courant, la tension et les ondes de puissance. En pratique, nous remplaçons généralement les impédances caractéristiques  $\zeta_{\infty}(x_l)$  et  $\zeta_{\infty}(x_r)$  par des impédances de référence qui représentent les impédances de charges connectées aux deux extrémités de la ligne. Dans la suite nous nous intéressons uniquement au calcul des éléments de la matrice de scattering d'une ligne non uniforme via des équations différentielles ordinaires (ODE). En effet, les éléments de cette matrice sont solutions des équations différentielles bien posées.

### 2.3 Coefficients de scattering via des équations différentielles ordinaires

La propagation d'un signal à travers une ligne de transmission est décrite par les paramètres de scattering (coefficients de réflexion, coefficients de transmission). Dans les méthodologies de diagnostic filaire, nous résolvons souvent deux sortes de problèmes : direct et inverse. Dans le cas particulier d'une ligne de transmission, le problème direct consiste, à partir des paramètres électriques linéiques  $R$ ,  $L$ ,  $G$  et

$C$  (ou les potentiels  $q_d$ ,  $q_-$  et  $q_+$  qui en découlent), à déterminer les paramètres de scattering. Dans cette section, nous présentons une méthode de calcul des paramètres de scattering basée sur la résolution des équations différentielles.

### 2.3.1 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission

**Coefficients de réflexion :** Le coefficient de réflexion à gauche (resp. à droite) est le quotient de l'onde sortante par l'onde entrante dans la ligne de transmission  $[x_l, x_r]$  à son extrémité  $x_l$  (resp. à  $x_r$ ) sous certaines conditions. Dans le cas de l'adaptation de l'impédance  $Z_l$  à la ligne, nous définissons le coefficient de réflexion à gauche ainsi :

**Définition 8.** Soit  $r(\omega, x)$  solution de l'équation de Riccati (2.8). Nous définissons le coefficient de réflexion à gauche par :

$$r_l(\omega) := r_l(\omega, x_l) \quad (2.54)$$

Le coefficient de réflexion à droite est défini par l'équation de Riccati (2.16). Nous avons la définition suivante :

**Définition 9.** Soit  $r(\omega, x)$  solution de l'équation de Riccati (2.16). En supposant que  $\rho_r(\omega) = 0$  (l'impédance de charge est adaptée à la ligne à l'extrémité droite), nous définissons le coefficient de réflexion à droite par :

$$r_r(\omega) := r_r(\omega, x_r) \quad (2.55)$$

L'impédance apparente d'une ligne de transmission, notée  $Z_{ap}$  relie le courant et la tension le long de la ligne par la relation suivante :

$$\forall x \in [x_l, x_r], V(\omega, x) = Z_{ap}(\omega, x)I(\omega, x) \quad (2.56)$$

D'après les équations des télégraphistes (1.24), nous montrons que  $Z_{ap}$  est solution de l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$\frac{dZ_{ap}(\omega, x)}{dx} = - \left( j\omega + \frac{R(x)}{L(x)} \right) \zeta_\infty(x) + \left( j\omega + \frac{G(x)}{C(x)} \right) \zeta_\infty^{-1}(x) Z_{ap}^2(\omega, x) \quad (2.57)$$

Étant donné que le coefficient de réflexion est le quotient de l'onde réfléchie par l'onde incidente. En utilisant les formules de changement de variables (1.28), nous définissons également le coefficient de réflexion via l'impédance apparente ainsi :

**Définition 10.** – Considérons l'équation de Riccati (2.57) avec la condition à l'extrémité droite  $Z_{ap}(\omega, x_r) = Z_r(\omega)$ . Le coefficient de réflexion à gauche satisfait :

$$r_l(\omega) := \frac{Z_{ap}(\omega, x_l) - \zeta_\infty(x_l)}{Z_{ap}(\omega, x_l) + \zeta_\infty(x_l)} \quad (2.58)$$

- Considérons l'équation de Riccati (2.57) avec la condition à l'extrémité gauche  $Z_{ap}(\omega, x_l) = Z_l(\omega)$ . Le coefficient de réflexion à droite satisfait :

$$r_r(\omega) := \frac{Z_{ap}(\omega, x_r) - \zeta_\infty(x_r)}{Z_{ap}(\omega, x_r) + \zeta_\infty(x_r)} \quad (2.59)$$

**Proposition 2.** Considérons une ligne de transmission modélisée par le système des équations de ZS et les conditions aux bords (2.6). Sous les hypothèses ci-dessous,

**H 5.** L'extrémité droite de la ligne de transmission est connectée à une impédance de charge adaptée à la ligne.

**H 6.** Les potentiels  $q_d$  et  $q_\pm$  sont continûment différentiable en  $x$  dans l'intervalle  $[x_l, x_r]$ .

Le comportement asymptotique du coefficient de réflexion  $r_l$  satisfait :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_l(\omega) = 0 \quad (2.60)$$

$$(2.61)$$

*Preuve de la proposition 2.* La preuve est détaillée dans l'Annexe E.  $\square$

**Coefficients de transmission :** Lors de l'envoi d'un signal de l'extrémité gauche (resp. droite) de la ligne, la partie de l'onde transmise à l'autre extrémité est caractérisée par le coefficient de transmission à droite (resp. gauche). En considérant les ondes incidente  $\nu_2$  et réfléchie  $\nu_1$ , nous définissons les coefficients de transmission à droite  $t_r$  et à gauche  $t_l$  ainsi :

$$t_r(\omega) = \frac{\nu_2(\omega, x_r)}{\nu_2(\omega, x_l)} \quad (2.62)$$

$$t_l(\omega) = \frac{\nu_1(\omega, x_l)}{\nu_1(\omega, x_r)} \quad (2.63)$$

Considérons le système des équations de ZS (2.4). Soient  $r_l(\omega, x)$  et  $r_r(\omega, x)$  les solutions des problèmes de Cauchy (2.8) et (2.16). Nous définissons deux fonctions  $t_r$  et  $t_l$  par :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad t_r(\omega, x) = \frac{\nu_2(\omega, x)}{\nu_2(\omega, x_l)}, \quad t_l(\omega, x) = \frac{\nu_1(\omega, x)}{\nu_1(\omega, x_r)} \quad (2.64)$$

En dérivant les fonctions  $t_r$  et  $t_l$ , nous obtiendrons les équations suivantes,

$$\frac{dt_r(\omega, x)}{dx} = \frac{1}{\nu_2(\omega, x_l)} \frac{d\nu_2(\omega, x)}{dx} \quad (2.65)$$

$$\frac{dt_l(\omega, x)}{dx} = \frac{1}{\nu_1(\omega, x_r)} \frac{d\nu_1(\omega, x)}{dx} \quad (2.66)$$

En utilisant le système des équations de ZS (2.4) dans (2.65) et (2.66), nous obtenons les équations différentielles suivantes,

$$\begin{cases} \frac{dt_r(\omega, x)}{dx} = (q_-(x)r_l(\omega, x) - q_d(x) - j\omega)t_r(\omega, x) \\ t_r(\omega, x_r) = 1 \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\begin{cases} \frac{dt_l(\omega, x)}{dx} = (q_+(x)r_d(\omega, x) - q_d(x) - j\omega)t_l(\omega, x) \\ t_l(\omega, x_l) = 1 \end{cases} \quad (2.68)$$

**Définition 11.** *Considérons les équations différentielles (2.67) et (2.68). Les coefficients de transmission à droite et à gauche satisfont :*

$$t_r(\omega) := t_r(\omega, x_r) \quad (2.69)$$

$$t_l(\omega) := t_l(\omega, x_l) \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Calcul des éléments de la matrice de scattering

Les solutions des équations différentielles définies précédemment permettent de déterminer les coefficients de scattering à une extrémité de la ligne de transmission en tenant compte de l'impédance de charge connectée à l'autre extrémité de la ligne. Ces coefficients de scattering peuvent aussi être obtenus par les mesures pendant l'expérience de la réflectométrie appliquée à une ligne de transmission.

Dans [56], nous avons des équations différentielles de Riccati qui décrivent l'évolution *rétrograde et progressive*<sup>3</sup> des éléments d'une matrice de scattering. Ces équations sont obtenues via la factorisation de la matrice de scattering par le produit de Redheffer[77, 5]. De manière similaire aux travaux de R.Bellman [14], dans cette section, nous présentons les équations différentielles vérifiées par les éléments de la matrice de scattering  $S$  associée aux équations de ZS (2.4).

---

3. backward et forward en anglais

**Proposition 3.** *Considérons les équations différentielles suivantes :  $\forall x \in [x_l, x_r[$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{l,l}(\omega, x)}{dx} = q_-(x)s_{l,l}^2(\omega, x) + 2(j\omega + q_d(x))s_{l,l}(\omega, x) - q_+(x) \\ \frac{ds_{l,r}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))s_{l,r}(\omega, x) \\ \frac{ds_{r,l}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))s_{r,l}(\omega, x) \\ \frac{ds_{r,r}(\omega, x)}{dx} = -q_-(x)s_{r,l}(\omega, x)s_{l,r}(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{l;r}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))(\iota_{l;r}(\omega, x) - \iota_{r;l}(\omega, x)s_{l,l}(\omega, x)) \\ \quad - c_0(x)\nu_2^s(\omega, x)s_{l,l}(\omega, x) + c_0(x)\nu_1^s(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{r;l}(\omega, x)}{dx} = s_{r,l}(\omega, x)(-q_-(x)s_{l,l}(\omega, x)\iota_{r;l}(\omega, x) + q_-(x)\iota_{l;r}(\omega, x) \\ \quad - c_0(x)\nu_2^s(\omega, x)) \end{array} \right. \quad (2.71)$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} s_{l,l}(\omega, x_r) = s_{r,r}(\omega, x_r) = 0 ; \quad s_{l,r}(\omega, x_r) = s_{r,l}(\omega, x_r) = 1 \\ \iota_{l;r}(\omega, x_r) = \iota_{r;l}(\omega, x_r) = 0 \end{aligned}$$

Les éléments de la matrice de scattering  $S$  et du vecteur  $\iota_{l;r}$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega) & s_{l,r}(\omega) \\ s_{r,l}(\omega) & s_{r,r}(\omega) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega, x_l) & s_{l,r}(\omega, x_l) \\ s_{r,l}(\omega, x_l) & s_{r,r}(\omega, x_l) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega) \\ \iota_{r;l}(\omega) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega, x_l) \\ \iota_{r;l}(\omega, x_l) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

où  $s_{l,l}$ ,  $s_{l,r}$ ,  $s_{r,l}$ ,  $s_{r,r}$ ,  $\iota_{l;r}$  et  $\iota_{r;l}$  sont solutions des équations différentielles (2.71).

**Preuve de la proposition 3 .** La preuve est détaillée dans l'annexe F.  $\square$

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, par une méthode constructive, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution du système des équations de Zakharov-Shabat et, de manière équivalente, des équations des télégraphistes<sup>4</sup>. Nous avons défini également les paramètres de scattering d'une ligne de transmission simple et nous avons présenté des techniques de calculs basées sur la résolution des équations différentielles pour une ligne de transmission non uniforme.

Dans la suite, nous allons adapter les notations introduites dans ce chapitre aux branches des réseaux afin de généraliser les équations caractéristiques d'une ligne de transmission simple aux réseaux électriques de topologie complexe.

---

4. Dans le Chapitre 3, nous présentons des exemples numériques

# Modèle réduit de la réflectométrie pour les réseaux électriques en arbre

Lors de cette première étude du problème direct sur un réseau électrique, nous considérons des réseaux électriques en arbres formés par des branches non uniformes avec des pertes tels que l'exemple illustré dans la Figure 3.1-(a). Avant d'étudier les réseaux en arbre en général, nous considérons d'abord les réseaux en étoile dont un exemple est illustré dans la Figure 3.1-(b), qui représentent la topologie la plus simple des réseaux en arbres.

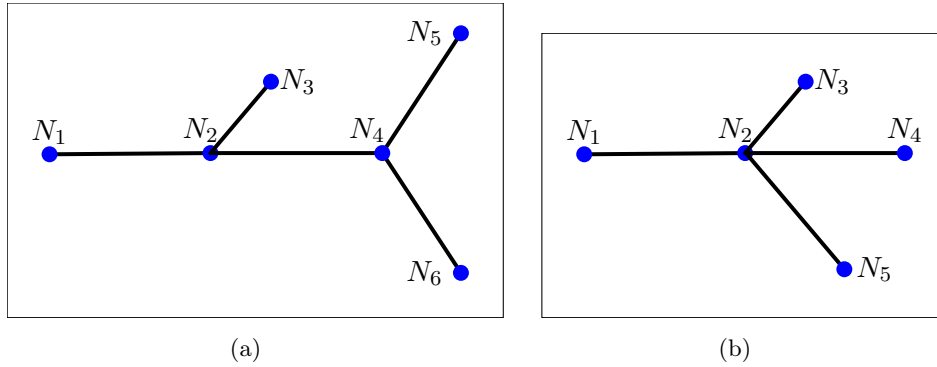


FIGURE 3.1 – (a) Exemple d'un réseau électrique en arbre. (b) Exemple d'un réseau électrique en étoile.

**Réseau en étoile :** Comme il est illustré par l'exemple de la Figure 3.1-(b), un réseau électrique en étoile, noté par  $\mathcal{S}$ , formé de  $\#B(\mathcal{S})$ <sup>1</sup> branches est composé de  $\#B(\mathcal{S})$  noeuds terminaux connectés à un noeud central à travers  $\#B(\mathcal{S})$  branches.

**Réseau en arbre :** Comme il est illustré par l'exemple de la Figure 3.1-(a), un réseau électrique en arbre, noté par  $\mathcal{T}$ , est formé d'un ensemble de noeuds connectés par des branches de sorte qu'entre toute paire de noeuds il existe un et un seul chemin formé de branches connectées.

1. Nous rappelons que la notation  $\#B(\mathcal{S})$  désigne un nombre entier, le nombre de branches dans un réseau  $\mathcal{S}$  (star) en étoile.

Dans la suite, nous faisons les hypothèses **H7**, **H8** et **H9** ci-dessous et nous utilisons les notations introduite dans la Section 1.3 et les conventions suivantes :

- $N_1$  : la racine de l'arbre, typiquement le noeud d'injection du signal de test (position de la source).
- $N_2$  : le noeud intermédiaire connecté directement, par une branche, à la racine de l'arbre  $N_1$ .
- $B_{1-2}$  : la branche de test qui représente la branche où la source du signal de test est connectée.

**H 7.** *Le réseau électrique en arbre est alimenté par une seule source de tension  $V_{s,1}$ , connectée à la racine  $N_1$ .*

**H 8.** *Les noeuds intermédiaires sont idéaux<sup>2</sup>.*

**H 9.** *Pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ$ <sup>3</sup>, les noeuds terminaux  $N_m$  sont connectés à des impédances de charges  $Z_{s,m}$ . Le court circuit et le circuit ouvert correspondent respectivement à  $Z_{s,m} = 0$  et  $Z_{s,m} = +\infty$ .*

### 3.1 Problème direct via la résolution des EDOs pour des réseaux en arbre

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la modélisation d'une ligne de transmission simple par les équations de Zakharov-Shabat et nous avons introduit la méthode de calcul des coefficients de scattering associés à une ligne de transmission qui est basée sur la résolution d'EDOs. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement au calcul du coefficient de réflexion. Nous allons présenter les étapes de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre, noté par  $r_{\mathcal{T}}$  défini au noeud d'injection  $N_1$ .

#### Remarque 16.

- Nous notons le coefficient de réflexion d'un réseau en étoile par  $r_{\mathcal{S}}$ .
- Il est possible de résoudre le problème direct d'un réseau en arbre avec la méthode qui sera présentée dans le Chapitre 5, mais la méthode du présent chapitre, dédiée aux réseaux en arbres, est algorithmiquement plus simple et numériquement plus efficace.

#### 3.1.1 Calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile

Avant d'étudier les réseaux en arbre en général, nous nous intéressons aux réseaux électriques en étoile  $\mathcal{S}$ . Les étapes principales de calcul du coefficient de réflexion  $r_{\mathcal{S}}$  se basent sur la résolution successive des équations différentielles de Riccati de type (2.8).

2. les noeuds idéaux sont introduites dans la Section 1.3.1.

3.  $\mathcal{E}^\circ$  représente l'ensemble des noeuds terminaux.

**Première étape :** Dans cette première étape, nous calculons le coefficient de réflexion  $r_{l,2-m}$  de la branche  $B_{2-m}$  à l'extrémité connectée au noeud central  $N_2$ . Considérons une branche  $B_{2-m}$ <sup>4</sup> caractérisée par les potentiels  $q_{\pm 2-m}$  et  $q_{d_{2-m}}$  et connectée à une impédance de charge  $Z_{s,m}$ . Nous lui associons l'équation différentielle de Riccati, définie sur l'intervalle  $[x_2, x_m]$  et vérifiée par le coefficient de réflexion local  $r_{l,2-m}$ <sup>5</sup>, suivante :

$$\begin{cases} \frac{dr_{l,2-m}(\omega, x)}{dx} = q_{-2-m}(x)r_{l,2-m}^2(\omega, x) + (2q_{d_{2-m}}(x) + 2j\omega)r_{l,2-m}(\omega, x) - q_{+2-m}(x) \\ r_{l,2-m}(\omega, x_m) = \rho_{r,2-m}(\omega) \end{cases} \quad (3.1)$$

où la condition au noeud  $N_m$  est donnée par,

$$\rho_{r,2-m}(\omega) = \frac{Z_{s,m}(\omega) - \zeta_{\infty 2-m}(x_m)}{Z_{s,m}(\omega) + \zeta_{\infty 2-m}(x_m)} \quad (3.2)$$

**Remarque 17.** Pour une notation rigoureuse, il faudrait une notation distincte pour la coordonnée de chaque branche, mais sans risque d'ambiguïté, nous restons avec le même  $x$  pour ne pas trop alourdir les notations. Nous comprendrons aussi que  $x = x_2$  et  $x = x_m$  signifient les extrémités de la branche  $B_{2-m}$  en question.

Le coefficient de réflexion de chaque branche  $B_{2-m}$  au noeud central  $N_2$  est la solution de l'équation différentielle précédente. Il est donné par :

$$r_{l,2-m}(\omega) := r_{l,2-m}(\omega, x_2) \quad (3.3)$$

**Seconde étape :** Après avoir résolu les équations différentielles de Riccati (3.1) définies sur l'ensemble des branches  $B_{2-m}$ , pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , nous calculons le coefficient de réflexion du réseau à la racine  $N_1$  en résolvant l'équation différentielle de Riccati, définie sur la branche de test  $B_{1-2}$ , suivante :

$$\begin{cases} \frac{dr_{l,1-2}(\omega, x)}{dx} = q_{-1-2}(x)r_{l,1-2}^2(\omega, x) + (2q_{d_{1-2}}(x) + 2j\omega)r_{l,1-2}(\omega, x) - q_{+1-2}(x) \\ r_{l,1-2}(\omega, x_2) = \rho_{r,1-2}(\omega) \end{cases} \quad (3.4)$$

où le calcul de la condition au noeud central  $\rho_{r,1-2}(\omega)$ , à partir des coefficients de réflexions  $r_{l,2-m}$  (déjà calculés à la première étape), sera détaillé plus loin. Le coefficient de réflexion du réseau en étoile, calculé à la racine  $N_1$ , est donné par :

$$r_S(\omega) := r_{l,1-2}(\omega, x_1) \quad (3.5)$$

Nous récapitulons les étapes de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile dans la Figure 3.2.

---

4. Pour l'exemple de la Figure 3.1-(b), il s'agit d'une des branches à droite du noeud  $N_2$   
 5. Le noeud central  $N_2$  se trouve à l'extrémité gauche de chacune des branches  $B_{2-m}$ .



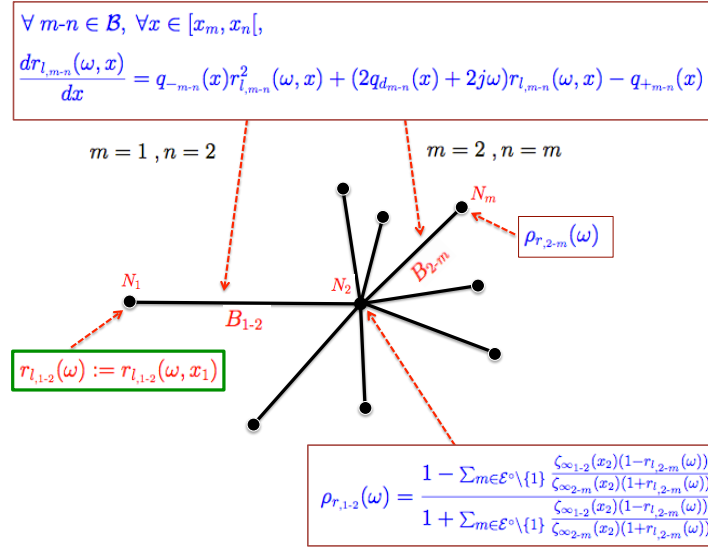


FIGURE 3.2 – Etapes de calcul du coefficient de réflexion.

**Calcul du  $\rho_{r,1-2}(\omega)$  :** Considérons les ondes de puissance  $\nu_{2,m}$  et  $\nu_{m,2}$ , solutions des équations de ZS (1.45). Les coefficients de réflexion  $r_{l,2-m}$  et le coefficient  $\rho_{r,1-2}$  sont définis par :

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, r_{l,2-m}(\omega) = \frac{\nu_{m,2}(\omega, x_2)}{\nu_{2,m}(\omega, x_2)}, \rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{\nu_{2,1}(\omega, x_2)}{\nu_{1,2}(\omega, x_2)} \quad (3.6)$$

D'après la définition des ondes de puissance en termes des tensions et des courants (1.43), nous réexprimons les coefficients  $r_{l,2-m}$  et  $\rho_{r,1-2}$  ainsi :

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, r_{l,2-m}(\omega) = \frac{Z_{ap2-m}(\omega, x_2) - \zeta_{\infty 2-m}(x_2)}{Z_{ap2-m}(\omega, x_2) + \zeta_{\infty 2-m}(x_2)} \quad (3.7)$$

$$\rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{Z_{ap1-2}(\omega, x_2) - \zeta_{\infty 1-2}(x_2)}{Z_{ap1-2}(\omega, x_2) + \zeta_{\infty 1-2}(x_2)} \quad (3.8)$$

où  $Z_{apm-n}$  représente l'impédance apparente de la branche  $B_{m-n}$ .

Les lois de Kirchhoff au noeud idéal  $N_2$  vérifient,

$$I_{1,2}(\omega, x_2) = \sum_{\mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} I_{2,m}(\omega, x_2) \quad (3.9)$$

$$V_{1,2}(\omega, x_2) = V_{2,m}(\omega, x_2), \quad \forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\} \quad (3.10)$$

Donc, d'après la définition des impédances apparentes des branches du réseau (1.37), nous avons la relation suivante :

$$Z_{ap1-2}(\omega, x_2) = \frac{1}{\sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1}{Z_{ap2-m}(\omega, x_2)}} \quad (3.11)$$

En utilisant la relation (3.7), nous réécrivons la relation (3.11) comme suite :

$$Z_{ap_{1-2}}(\omega, x_2) = \frac{1}{\sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1 - r_{l,2-m}(\omega)}{\zeta_{\infty 2-m}(x_2)(1 + r_{l,2-m}(\omega))}} \quad (3.12)$$

En remplaçant  $Z_{ap_{1-2}}$  dans (3.8), nous exprimons le coefficient  $\rho_{r,1-2}(\omega)$  sous la forme suivante :

$$\rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{1 - \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{\zeta_{\infty 1-2}(x_2)(1 - r_{l,2-m}(\omega))}{\zeta_{\infty 2-m}(x_2)(1 + r_{l,2-m}(\omega))}}{1 + \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{\zeta_{\infty 1-2}(x_2)(1 - r_{l,2-m}(\omega))}{\zeta_{\infty 2-m}(x_2)(1 + r_{l,2-m}(\omega))}} \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en arbre

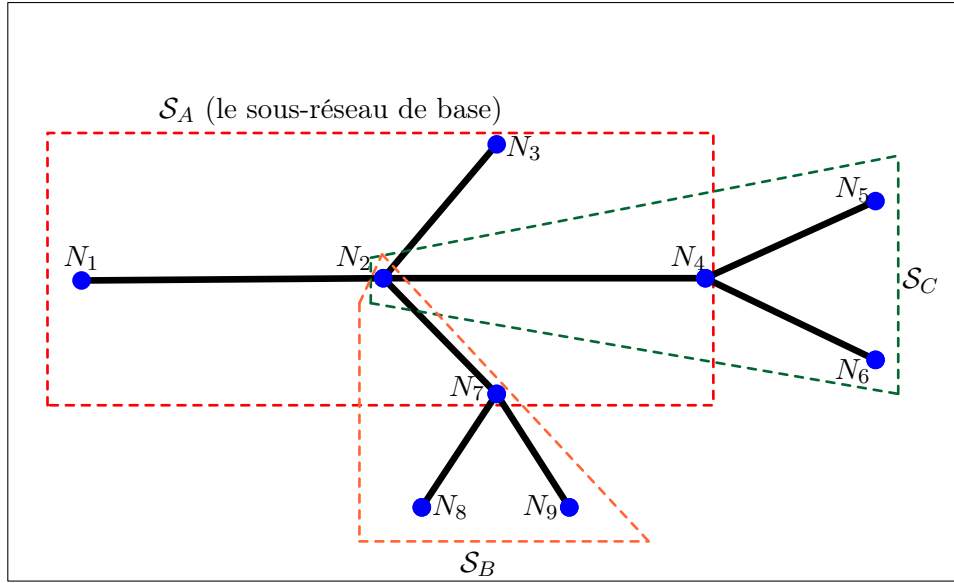


FIGURE 3.3 – Réseau électrique en arbre subdivisé en trois sous-réseaux en étoile.

Les étapes de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile peuvent être généralisées au calcul du coefficient de réflexion d'un réseau en arbre qui se décompose récursivement en sous-réseaux électriques en étoiles. En effet, pour un réseau électrique en arbre, le principe du calcul consiste à considérer le sous-réseau de base de l'arbre<sup>6</sup> comme un réseau en étoile dont les "charges" connectées aux noeuds terminaux du sous-réseau de base autres que la racine sont composées de sous-réseaux, et chacun de ces sous-réseaux est à son tour traité comme un réseau en arbre, et ainsi de suite. Le coefficient de réflexion de l'arbre est obtenu en cascadeant les calculs des différents coefficients de réflexion des sous-réseaux.

6. Le sous-réseau de base de l'arbre est un réseau en étoile constitué du noeud  $N_2$  et de toutes les branches qui sont directement connectées.

Alternativement, un réseau en étoile peut être étendu à un réseau en arbre en remplaçant chacune de ses branches, à l'exception de la branche de test  $B_{1-2}$ , par un autre réseau en étoile. Chaque branche du réseau en étoile nouvellement ajoutée peut à son tour être remplacée par un réseau en étoile, ainsi de suite.

Le coefficient de réflexion d'un réseau en arbre  $r_{\mathcal{T}}(\omega)$  est donc calculé au noeud  $N_1$  et il est défini par :

$$r_{\mathcal{T}}(\omega) := r_{l_{1-2}}(\omega, x_1) \quad (3.14)$$

où  $r_{l_{1-2}}(\omega, x_1)$  est la solution de l'équation différentielle de Riccati (3.4) évaluée à l'extrémité  $x = x_1$ . La condition au bord  $\rho_{r_{1-2}}$  est exprimé en fonction des coefficients de réflexion des branches des sous-réseaux en étoiles. Afin de mettre au clair ce principe de calcul, nous appliquons le formalisme décrit précédemment sur un exemple d'un réseau en arbre.

Considérons le réseau électrique en arbre  $\mathcal{T}$ , présenté par le graphe de la Figure 3.3, subdivisé en trois sous-réseaux en étoile ( $\mathcal{S}_A$ ,  $\mathcal{S}_B$ ,  $\mathcal{S}_C$ ).

$\mathcal{S}_A$  : Il est constitué de 4 branches ( $B_{1-2}$ ,  $B_{2-3}$ ,  $B_{2-4}$ ,  $B_{2-7}$ ).

$\mathcal{S}_B$  : Il est constitué de 3 branches ( $B_{2-7}$ ,  $B_{7-8}$ ,  $B_{7-9}$ ).

$\mathcal{S}_C$  : Il est constitué de 3 branches ( $B_{2-4}$ ,  $B_{4-5}$ ,  $B_{4-6}$ ).

Afin de calculer le coefficient de réflexion du réseau  $\mathcal{T}$ , nous procédons comme suit :

- Calcul du coefficient de réflexion  $r_{\mathcal{S}_C}$  du sous-réseau  $\mathcal{S}_C$ .
- Calcul du coefficient de réflexion  $r_{\mathcal{S}_B}$  du sous-réseau  $\mathcal{S}_B$ .
- Calcul du coefficient de réflexion  $r_{l_{2-3}}$  de la branche  $B_{2-3}$ .

Les coefficients de réflexion  $r_{\mathcal{S}_B}(\omega)$  et  $r_{\mathcal{S}_C}(\omega)$  sont calculés suivant les étapes de calcul du coefficients de réflexion d'un réseau électrique en étoile.

La condition initiale  $\rho_{r_{1-2}}$ , de l'équation différentielle de Riccati (3.4), est donc exprimé en fonction des coefficients de réflexion des sous-réseaux en étoiles  $\mathcal{S}_B$  et  $\mathcal{S}_C$  et le coefficient de réflexion de la branche  $B_{2-3}$ .

$$\rho_{r_{1-2}}(\omega) = \frac{1 - \left( \frac{1-r_{l_{2-3}}(\omega)}{1+r_{l_{2-3}}(\omega)} + \frac{1-r_{\mathcal{S}_B}(\omega)}{1+r_{\mathcal{S}_B}(\omega)} + \frac{1-r_{\mathcal{S}_C}(\omega)}{1+r_{\mathcal{S}_C}(\omega)} \right)}{1 + \left( \frac{1-r_{l_{2-3}}(\omega)}{1+r_{l_{2-3}}(\omega)} + \frac{1-r_{\mathcal{S}_B}(\omega)}{1+r_{\mathcal{S}_B}(\omega)} + \frac{1-r_{\mathcal{S}_C}(\omega)}{1+r_{\mathcal{S}_C}(\omega)} \right)} \quad (3.15)$$

En suivant ce formalisme, nous calculons le coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre quelconque et l'algorithme proposé dans cette section peut être mis en place très facilement en *Matlab* ou un logiciel similaire.

### 3.2 Propriétés du coefficient de réflexion du réseau en étoile dans un cas particulier

Dans cette section, nous présentons certaines propriétés du coefficient de réflexion du réseau en étoile dans un cas particulier qui seront utiles pour la validation du simulateur numérique dédié à ce chapitre. Dans la suite, nous faisons les hypothèses suivantes :

**H 10.** *La branche de test  $B_{1-2}$  est uniforme sans perte.*

**H 11.** *Les impédances caractéristiques en haute fréquence des branches du réseau sont identiques au noeud central, c'est-à-dire,*

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, \quad \zeta_{\infty_{2-m}}(x_2) = \zeta_{\infty_{1-2}}(x_2)$$

**Remarque 18.** *Sous l'hypothèse **H11**, le coefficient  $\rho_{r,1-2}(\omega)$  est donné par :*

$$\rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{1 - \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1 - r_{l,2-m}(\omega)}{1 + r_{l,2-m}(\omega)}}{1 + \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1 - r_{l,2-m}(\omega)}{1 + r_{l,2-m}(\omega)}} \quad (3.16)$$

#### 3.2.1 Coefficient de réflexion d'un réseau en étoile uniforme

Considérons un réseau électrique en étoile, formé des branches uniformes avec pertes. Nous simplifions les expressions des potentiels  $q_{\pm m-n}$  (1.31) et nous associons à chaque branche  $B_{m-n}$  un potentiel constant  $q_{ds_{m-n}}$  tel que,

$$\forall m-n \in \mathcal{B}, \quad q_{ds_{m-n}} := q_{+m-n} = -q_{-m-n} \quad (3.17)$$

Il représente le facteur de dispersion de la branche  $B_{m-n}$  et il vaut,

$$q_{ds_{m-n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{R_{m-n}}{L_{m-n}} - \frac{G_{m-n}}{C_{m-n}} \right) \quad (3.18)$$

En utilisant le potentiel  $q_{ds_{m-n}}$ , nous simplifions les équations différentielles de Riccati vérifiées par les fonctions  $r_{l,m-n}(\omega, x)$  comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dr_{l,m-n}(\omega, x)}{dx} &= -q_{ds_{m-n}} \left( r_{l,m-n}^2(\omega, x) - 1 \right) + (2q_{ds_{m-n}} + 2j\omega) r_{l,m-n}(\omega, x) \\ r_{l,m-n}(\omega, x_n) &= \rho_{r,m-n}(\omega) \end{cases} \quad (3.19)$$

Cette équation différentielle admet une solution unique<sup>7</sup> qui s'écrit sous la forme,

$$\forall x \in [x_m, x_n], \quad r_{l,m-n}(\omega, x) = \frac{T_1(\omega, x)\rho_{r,m-n}(\omega) - T_2(\omega, x)}{T_2(\omega, x)\rho_{r,m-n}(\omega) + T_3(\omega, x)} \quad (3.20)$$

---

7. Les détails de calcul sont données dans l'annexe D.

avec

$$T_1(\omega, x) = \tilde{\gamma}_{m-n}^{-1}(\omega)(q_{d_{m-n}} + j\omega) + \tanh^{-1}(\tilde{\gamma}_{m-n}(\omega)(x - x_n)) \quad (3.21)$$

$$T_2(\omega, x) = \tilde{\gamma}_{m-n}^{-1}(\omega)q_{ds_{m-n}} \quad (3.22)$$

$$T_3(\omega, x) = -\tilde{\gamma}_{m-n}^{-1}(\omega)(q_{d_{m-n}} + j\omega) + \tanh^{-1}(\tilde{\gamma}_{m-n}(\omega)(x - x_n)) \quad (3.23)$$

où  $\tilde{\gamma}_{m-n}$  représente la constante de propagation normalisée de la branche  $B_{m-n}$ . Elle est définie par,

$$\tilde{\gamma}_{m-n}(\omega) = \frac{\gamma_{m-n}(\omega)}{\sqrt{L_{m-n}C_{m-n}}}$$

Sous l'hypothèse **H10** et d'après l'expression (3.20), le coefficient de réflexion de la branche  $B_{1-2}$  s'exprime ainsi :

$$r_{l,1-2}(\omega) = \frac{\tanh^{-1}(-j\omega l_{1-2}) + 1}{\tanh^{-1}(-j\omega l_{1-2}) - 1} \rho_{r,1-2}(\omega) \quad (3.24)$$

D'après les hypothèses **H10** et **H11**, nous exprimons explicitement le coefficient de réflexion d'un réseau en étoile  $\mathcal{S}$ , formé de branches uniformes, ainsi :

$$r_{\mathcal{S}}(\omega) = \frac{1 - \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1 - r_{l,2-m}(\omega)}{1 + r_{l,2-m}(\omega)}}{1 + \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \frac{1 - r_{l,2-m}(\omega)}{1 + r_{l,2-m}(\omega)}} e^{-2j\omega l_{1-2}} \quad (3.25)$$

où pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ ,  $r_{l,2-m}(\omega) = \frac{T_1(\omega, x_2)\rho_{r,2-m}(\omega) - T_2(\omega, x_2)}{T_2(\omega, x_2)\rho_{r,2-m}(\omega) + T_3(\omega, x_2)}$ .

### 3.2.2 Coefficient de réflexion d'un réseau en étoile non uniforme

Dans le cas des branches  $B_{2-m}$  non uniformes, pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , la complexité de la résolution des équations différentielles de Riccati (3.1) ne nous permet pas d'exprimer explicitement le coefficient de réflexion  $r_{\mathcal{S}}(\omega)$ . Sous certaines hypothèses, nous étendons le résultat sur le comportement asymptotique du coefficient de réflexion d'une ligne de transmission simple.

**H 12.**  $\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , les noeuds  $N_m$  sont connectés à des impédances de charges  $Z_{s,m}$  adaptée aux branches  $B_{2-m}$ .

**H 13.**  $\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , les potentiels  $q_{\pm 2-m}$  et  $q_{d_{2-m}}$  sont continûment différentiables en  $x$ , pour tout  $x \in [x_2, x_m]$ .

### 3.3. Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion 61

**Proposition 4.** *Considérons un réseau électrique en étoile  $\mathcal{S}$  formé de  $\#B(\mathcal{S})$  branches non uniformes. Sous les hypothèses **H10**, **H12** et **H13**, le comportement asymptotique du coefficient de réflexion  $r_{\mathcal{S}}(\omega)$  satisfait :*

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |r_{\mathcal{S}}(\omega)| = \frac{\#B(\mathcal{S}) - 2}{\#B(\mathcal{S})} \quad (3.26)$$

où  $|r_{\mathcal{S}}(\omega)|$  représente le module du coefficient de réflexion du réseau en étoile  $\mathcal{S}$ .

**Preuve de la Proposition 4.** Sous l'hypothèse **H10**, le coefficient de réflexion d'un réseau  $\mathcal{S}$  est donné par :

$$r_{\mathcal{S}}(\omega) = \rho_{r,1-2}(\omega) e^{-2j\omega l_{1-2}} \quad (3.27)$$

or d'après la Proposition 2, pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , le coefficient de réflexion de la branche  $B_{2-m}$  satisfait,

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_{l,2-m}(\omega) = 0 \quad (3.28)$$

En simplifiant l'expression (3.16), en prenant compte les hypothèses **H13**, **H12** et en passant à la limite, nous obtenons,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{2 - \#B(\mathcal{S})}{\#B(\mathcal{S})} \quad (3.29)$$

Les deux relations (3.27) et (3.29) impliquent,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_{\mathcal{S}}(\omega) e^{2j\omega l_{1-2}} = \frac{\#B(\mathcal{S}) - 2}{\#B(\mathcal{S})} \quad (3.30)$$

En prenant le module des deux côtés de cette équation, nous obtenons le résultat (3.26).  $\square$

Lors de l'étude du problème inverse, le résultat de la Proposition 4 est un résultat sur l'identifiabilité du nombre total des branches du réseau  $\mathcal{S}$ . Dans la partie des simulations numériques, nous vérifions ces propriétés du coefficient de réflexion afin de valider le simulateur numérique qui permet de générer le coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre et en particulier d'un réseau électrique en étoile.

### 3.3 Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de simulations numériques du modèle réduit de la réflectométrie pour des réseaux électriques en arbres. Dans un premier temps, nous décrivons le simulateur numérique qui génère le coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre, ensuite, nous comparerons des coefficients de réflexion simulés avec des mesures réelles réalisées au Laboratoire de Génie Electrique de Paris (*LGEP*). Enfin, nous vérifions quelques propriétés numériques du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile dans des cas particuliers précédemment étudiés.

### 3.3.1 Description du simulateur numérique

Le simulateur du coefficient de réflexion dédié à ce chapitre est réalisé sous *Matlab* et il permet de générer le coefficient de réflexion des réseaux électriques en arbres dans le domaine fréquentiel. Ce simulateur implémentant l'algorithme décrit dans la Section 3.1 est composé essentiellement de trois fonctions *Matlab* et d'un fichier de spécification du réseau simulé.

Nous disposons d'un fichier de données de la forme *Nom-reseau.txt* contenant les spécifications de la topologie du réseau  $\mathcal{T}$  et les conditions de l'expérience de la réflectométrie. Concernant la topologie du réseau, nous indiquons,

- le nombre total des noeuds  $\#N(\mathcal{T})$ .
- le nombre total des branches  $\#B(\mathcal{T})$ .
- l'ensemble des branches  $\mathcal{B}$ .
- les caractéristiques des  $B_{m-n}$ , pour tout  $m-n \in \mathcal{B}$ .

Pour les conditions aux noeuds terminaux, nous indiquons les coefficients  $\rho_{r,m-n}(\omega)$  qui correspondent aux conditions aux bords des équations différentielles de Riccati et la plage de pulsation  $\omega$ .

### 3.3.2 Comparaison des simulations avec les mesures

Dans cette première étape de la validation du simulateur numérique, nous comparons des coefficients de réflexion simulés et mesurés. Nous considérons les deux réseaux électriques de la Figure 3.1, formés par des câbles coaxiaux d'impédance caractéristique en haute fréquence  $\zeta_\infty = 50 \, \Omega$  et d'une vitesse de propagation  $c_0 = 2.478.10^8 \, \text{m/s}$ . Les paramètres linéiques  $RLGC_{m-n}$ <sup>8</sup> de chaque branche  $B_{m-n}$  vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} L_{m-n} &= 0.2018 \, \mu\text{H}/\text{m}, \quad C_{m-n} = 0.0807 \, \text{nF}/\text{m} \\ R_{m-n} &= 0 \, \Omega/\text{m}, \quad G_{m-n} = 0 \, \text{S}/\text{m} \end{aligned}$$

**Réseau en étoile** Pour ce premier exemple, nous considérons le réseau électrique en étoile de la Figure 3.1-(b). Il est composé de 4 branches des longueurs suivantes :

$$l_{1-2} = 1.5 \, \text{m}; \quad l_{2-3} = 0.75 \, \text{m}; \quad l_{2-4} = 1.5 \, \text{m}; \quad l_{2-5} = 1.5 \, \text{m}$$

Les extrémités des branches  $B_{2-m}$ , pour tout  $m \in \{3, 4, 5\}$  sont en circuit ouvert ( $\forall m \in \{3, 4, 5\}, \rho_{r,2-m}(\omega) = 1$ ).

La Figure 3.4 représente la comparaison du module et de la phase du coefficient de réflexion obtenu par le simulateur numérique *Matlab* et coefficient de réflexion réel.

8. L'inductance  $L_{m-n}$  et la capacité  $C_{m-n}$  sont obtenues par les deux relations suivantes :

$$\zeta_\infty = \sqrt{\frac{L_{m-n}}{C_{m-n}}}, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{m-n}C_{m-n}}}$$

### 3.3. Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion 63

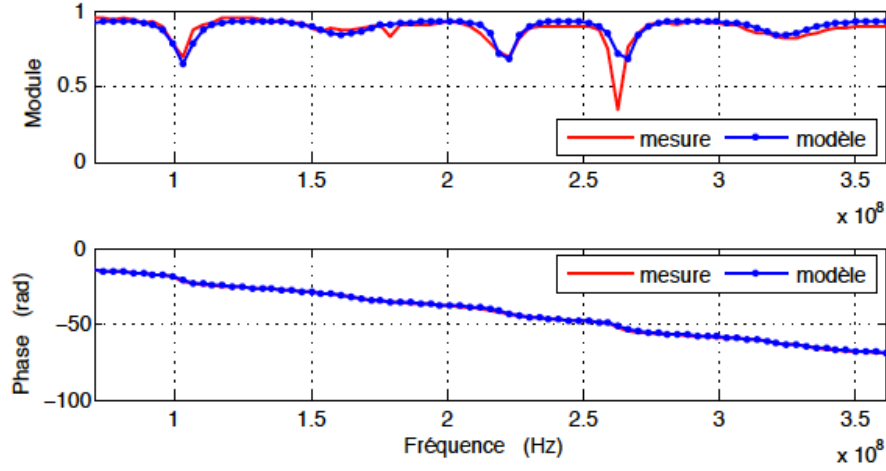


FIGURE 3.4 – Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé du réseau en étoile.

**Réseau en arbre** Dans ce deuxième exemple, nous considérons le réseau électrique en arbre présenté dans le Figure 3.1-(a). Il est composé de 5 branches telles que :

$$l_{1-2} = 1.5 \text{ m}; l_{2-3} = 0.75 \text{ m}; l_{2-4} = 1.5 \text{ m}; l_{4-5} = 1.5 \text{ m}; l_{4-6} = 1.5 \text{ m}$$

Les extrémités des branches  $B_{2-3}$  et  $B_{4-5}$  sont en circuit ouvert et l'extrémité de

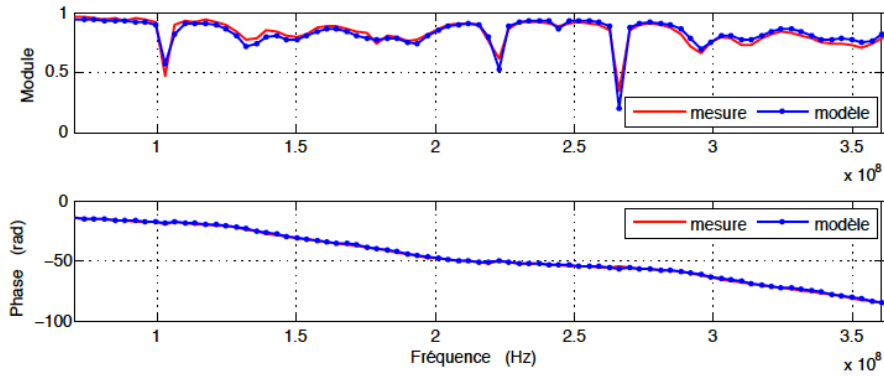


FIGURE 3.5 – Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé du réseau en arbre.

la branche  $B_{4-6}$  est en court circuit ( $\rho_{r,4-6}(\omega) = -1$ ). Le module et la phase du



coefficient de réflexion du réseau en arbre simulé et mesuré sont présentés dans la Figure 3.5.

Les Figures 3.4 et 3.5 présentent un bon accord entre les mesures et les simulations du coefficient de réflexion (tant pour le module et la phase). La petite différence dans le module peut provenir de bruits de mesures et des pertes dans les connecteurs au niveau des noeuds intermédiaires.

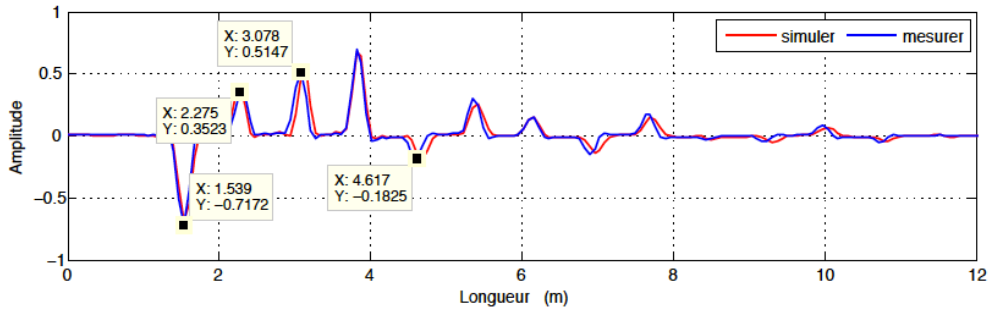


FIGURE 3.6 – Comparaison des réflectogrammes associés aux coefficients de réflexion mesuré et simulé du réseau en étoile.

Dans le domaine temporel, nous avons également une légère différence dans les amplitudes des réflectogrammes<sup>9</sup> associés aux coefficients de réflexion. Les Figures 3.6 et 3.7 représentent respectivement la comparaison des réflectogrammes associés aux coefficients de réflexion mesuré et simulé du réseau pour le réseau en étoile et en arbre.

Cette comparaison entre les coefficients de réflexion simulés et mesurés représente une première étape de la validation du simulateur numérique. Maintenant, nous allons vérifier quelques propriétés du coefficient de réflexion simulé d'un réseau en étoile.

### 3.3.3 Propriétés numériques du coefficient de réflexion

Considérons le réseau électrique en étoile de la Figure 3.8 qui est formé de 5 branches de longueurs suivantes :

$$l_{1-2} = 4 \text{ m}; l_{2-3} = 2.5 \text{ m}; l_{2-4} = 2 \text{ m}; l_{2-5} = 1 \text{ m}; l_{2-6} = 1.5 \text{ m}$$

Dans cette seconde étape de la validation du simulateur numérique, nous vérifions quelques propriétés numériques du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile. Dans

9. Il s'agit de la courbe du coefficient de réflexion dans le domaine temporel. Il est généralement exprimé en fonction de la longueur (m).

### 3.3. Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion 65

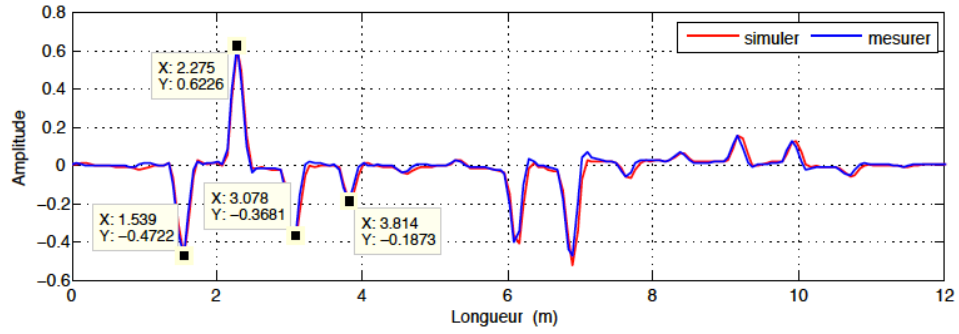


FIGURE 3.7 – Comparaison des réflectogrammes associés aux coefficients de réflexion mesuré et simulé du réseau en arbre.

un premier exemple, nous comparons le coefficient de réflexion exact<sup>10</sup> du réseau électrique de la Figure 3.8 dans le cas des branches uniformes et le coefficient de réflexion obtenu avec le simulateur pour le même réseau électrique en étoile. Dans un second exemple, nous simulons le coefficient de réflexion du même réseau dans le cas de branches non uniformes et nous comparons le résultat obtenu avec le résultat de la Proposition 4.

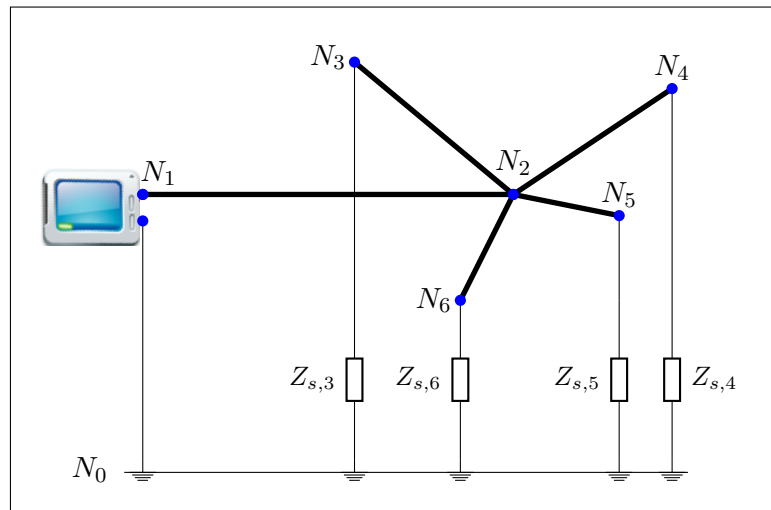


FIGURE 3.8 – Exemple d'un réseau électrique en étoile mono-filaire non uniforme.

10. Nous désignons par le coefficient de réflexion exact, le coefficient de réflexion obtenu par l'expression (3.25).

### 3.3.3.1 Réseau électrique en étoile uniforme

Considérons le réseau électrique en étoile de la Figure 3.8. Nous supposons que les branches  $B_{m-n}$ , pour  $m-n \in \mathcal{B}$  sont uniformes telles que :

$$\begin{aligned} \forall m-n \in \mathcal{B}, \quad L_{m-n} &= 0.9 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \quad C_{m-n} = 0.1 \times 10^{-9} \text{ F/m} \\ \forall m \in \{3, 4, 5, 6\} \quad R_{2-m} &= 3 \times 10^{-1} \Omega/\text{m}, \quad G_{2-m} = 10^{-9} \text{ S/m} \\ R_{1-2} &= 0 \Omega/\text{m}, \quad G_{1-2} = 0, \quad S/m \end{aligned}$$

Les noeuds terminaux  $N_m$ , pour tout  $m \in \{2, 3, 4\}$ , sont connectées à des impédances de charges  $Z_{s,m}$  dont ses valeurs sont illustrées dans le Tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Caractéristiques des terminaisons des branches

Noeud $N_m$	$N_1$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$
Impédances $Z_{s,m}$	$\zeta_{\infty,1-2}$	$2\zeta_{\infty,1-2}$	0	$1.5\zeta_{\infty,1-2}$	$+\infty$

La Figure 3.9 présente la comparaison du module et de la phase du coefficient de réflexion numérique et le coefficient de réflexion analytique obtenu par la solution exacte de l'équation différentielle de Riccati (3.19). Nous constatons que le module

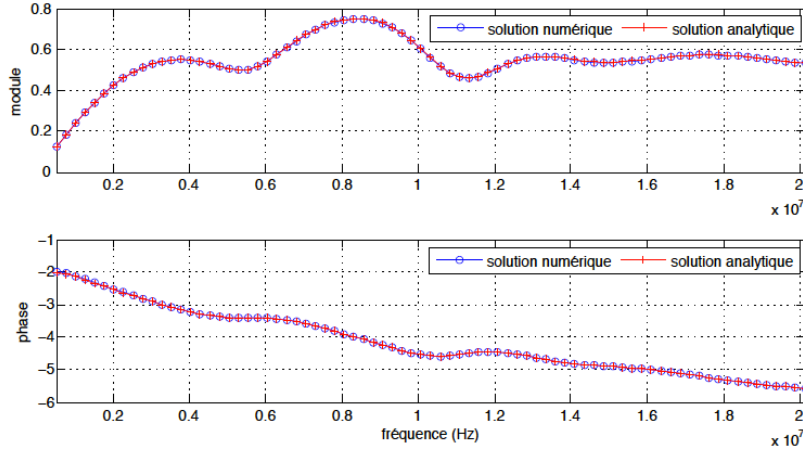


FIGURE 3.9 – Comparaison des coefficients de réflexion obtenus par le simulateur numérique et l'expression (3.25).

et la phase des deux coefficients de réflexion sont superposés. L'erreur quadratique entre les deux coefficient de réflexion est d'ordre  $10^{-7}$ .

### 3.3. Validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion 67

#### 3.3.3.2 Réseau électrique en étoile non uniforme

L'objectif dans cet exemple est de vérifier la Proposition 4 sur le comportement asymptotique du coefficient de réflexion d'un réseau en étoile non uniforme.

Considérons le réseau électrique en étoile de la Figure 3.8. Nous supposons que la branche  $B_{1-2}$  est uniforme sans perte telle que,

$$L_{1-2} = 0.9 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \quad C_{1-2} = 0.1 \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

Les branches  $B_{2-m}$ , pour  $m \in \{3, 4, 5, 6\}$ , sont caractérisées par les potentiels  $q_{d,2-m}$  et  $q_{+,2-m}$  de la Figure 3.10.

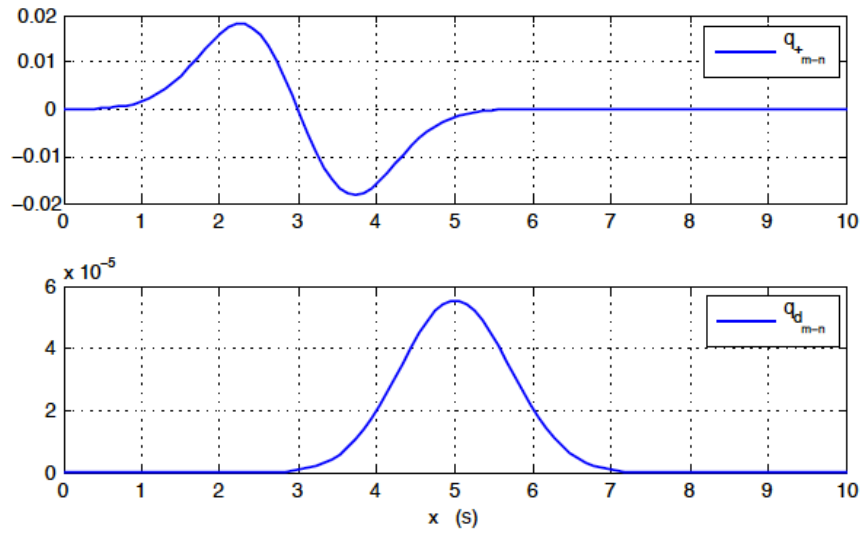


FIGURE 3.10 – Profils des potentiels  $q_{+,m-n}$  et  $q_{d,m-n}$ .

Aux noeuds terminaux  $N_m$ , pour  $m \in \{3, 4, 5, 6\}$ , nous connectons des impédances de charges adaptées aux branches  $B_{2-m}$ , c'est-à-dire,

$$\forall m \in \{3, 4, 5, 6\}, \quad \rho_{r,2-m}(\omega) = 0$$

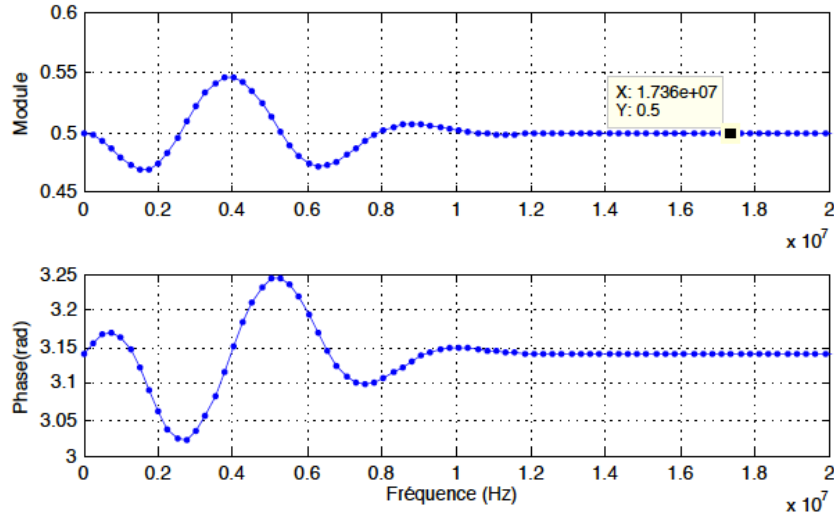


FIGURE 3.11 – Coefficient de réflexion du réseau en étoile de la Figure 3.8.

Le module et la phase du coefficient de réflexion simulé sont présentés dans la Figure 3.11. Nous remarquons qu'en haute fréquence (à partir de  $15\text{ MHz}$ ), le module du coefficient de réflexion converge vers 0.5. Cette valeur vérifie la relation (3.26) de la Proposition 4.

### 3.4 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle mathématique réduit de la réflectométrie pour caractériser le coefficient de réflexion des réseaux électriques en arbre non uniforme. Ce modèle constitue une première étape pour développer des méthodes avancées pour le diagnostic de défauts de réseaux complexes.

Après l'étude des équations de ZS et l'introduction des paramètres de scattering via des EDOs sur une ligne de transmission simple, nous avons présenté les étapes de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre. Nous avons étudié également quelques propriétés du coefficient de réflexion des réseaux en étoile qui étaient utiles dans la validation du modèle EDOs du calcul du coefficient de réflexion. La comparaison des simulations avec des mesures réelles fournit une validation du modèle et du simulateur.

Dans le prochain chapitre, nous allons étudier le problème inverse en utilisant le présent modèle mathématique de la réflectométrie.

# Etude du problème inverse d'un réseau électrique étoile uniforme

## 4.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté une méthode de calcul du coefficient de réflexion d'un réseau électrique en arbre. Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème inverse sur des réseaux électriques en étoiles formés de lignes de transmission uniformes avec pertes. L'objectif est d'estimer le nombre, les longueurs et les coefficients de pertes des branches du réseau.

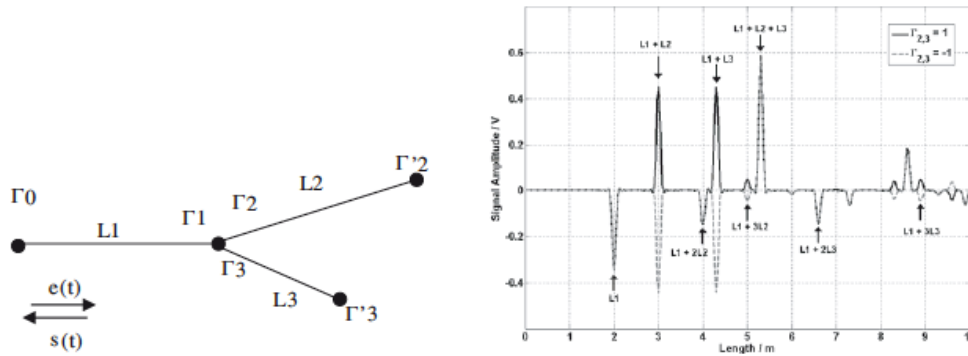


FIGURE 4.1 – Exemple d'un réseau électrique en Y et son réflectogramme (Source : [8]).

Dans la littérature sur la détection de défauts, la méthode classique utilisée pour l'estimation des longueurs des branches d'un réseau électrique se base sur l'analyse du réflectogramme associé au réseau [92, 8]. Dans l'exemple de la Figure 4.1<sup>1</sup>, le premier pic correspond à la longueur de la première branche du réseau en Y. Le deuxième pic correspond à la somme des longueurs de la première et la deuxième branche du réseau. À cause des réflexions multiples qui engendrent plus de pics dans le réflectogramme que le nombre de branches, l'estimation du nombre de branches et de leurs longueurs avec cette méthode est compliquée, même pour un réseau simple en forme de Y, ce qui la limite au cas des réseaux avec peu de branches. Dans ce présent travail, à travers une méthode itérative, nous allons estimer, à partir du coefficient de réflexion au noeud  $N_1$ , le nombre, les longueurs en distances électriques et

1.  $\Gamma_0$  représente le coefficient de réflexion du réseau.

les coefficients de pertes des branches pour des réseaux électriques en étoiles. Nous rappelons que la longueur en distance électrique  $l_{m-n}$  et la longueur géométrique  $\ell_{m-n}$  d'une branche  $B_{m-n}$  sont en général reliées par la transformation de Liouville (1.23) et dans le cas d'une branche uniforme, cette relation se simplifie en  $l = \ell/c_0$  où  $c_0$  représente la vitesse de propagation des ondes dans la branche.

Les simulations numériques ont montré que cette méthode peut être appliquée aux réseaux en étoile composés d'une dizaine de branches uniformes. Nous allons également vérifier, par des simulations numériques, un résultat théorique, présenté dans [101], sur l'identifiabilité des longueurs en distances électriques et des coefficients de pertes pour des réseaux non uniformes<sup>2</sup>.

La méthodologie de diagnostic développée dans ce chapitre est basée sur l'exploitation de l'expression explicite de l'admittance apparente du réseau en étoile au noeud central.

## 4.2 Admittance apparente au noeud central

Considérons un réseau électrique en étoile  $\mathcal{S}$ , composé de  $\#B(\mathcal{S})$  branches uniformes connectées au noeud central  $N_2$ . Pour tout  $m-n \in \mathcal{B}$ , la branche  $B_{m-n}$  est modélisée par les équations des télégraphistes (1.24), indexée par  $m-n$ .

Comme dans le chapitre précédent, nous supposons que la branche de test  $B_{1-2}$  est délimitée par le noeud  $N_1$  qui est connecté à une source de tension alternative  $V_{s,1}$  avec une impédance  $Z_{s,1}$ , et par le noeud central  $N_2$  qui est idéal. Nous supposons également que pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , le noeud  $N_m$  est connecté à une impédance de charge passive  $Z_{s,m}$ .

### 4.2.1 Expression explicite de l'admittance apparente

Dans cette section, nous cherchons une expression explicite de l'admittance apparente au noeud central  $Y_{ap_{N_2}}$  définie ci-dessous qui sera la base de la méthode itérative que nous allons présenter.

**Définition 12.** *L'admittance apparente au noeud central  $N_2$  d'un réseau en étoile, notée  $Y_{ap_{N_2}}$  représente l'admittance au noeud central en excluant la branche de test  $B_{1-2}$ . En considérant le sous-réseau en étoile, formé des branches  $B_{2-m}$  pour  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , comme une charge connectée à l'extrémité de la branche de test du côté du noeud  $N_2$ , l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  représente l'admittance de cette charge.*

Par la suite, nous cherchons à exprimer l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  à partir des caractéristiques des branches. Nous verrons qu'elle est égale à la somme des admittances  $Y_{ap_{2-m}}(\omega, x_2)$  des branches  $B_{2-m}$  au noeud  $N_2$ . Nous nous intéressons donc aux équations différentielles de Riccati, vérifiées par les admittances apparentes  $Y_{ap_{2-m}}$  sur

---

2. Le résultat théorique de [101] n'était pas accompagné d'algorithme pratique.

les branches  $B_{2-m}$ , suivantes :  $\forall x \in [x_2, x_m]$ ,

$$\begin{cases} \frac{dY_{ap_{2-m}}(\omega, x)}{dx} = c_{0_{2-m}}(R_{2-m} + j\omega L_{2-m})Y_{ap_{2-m}}^2(\omega, x) - c_{0_{2-m}}(G_{2-m} + j\omega C_{2-m}) \\ Y_{ap_{2-m}}(\omega, x_m) = Y_{s,m}(\omega) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $c_{0_{2-m}} = 1/\sqrt{L_{2-m}C_{2-m}}$  et  $Y_{s,m}(\omega) = 1/Z_{s,m}(\omega)$  représentent respectivement la vitesse de propagation dans la branche  $B_{2-m}$  et l'admittance de la charge connectée au noeud  $N_m$ .

Dans l'équation (4.1) qui est définie sur les branches  $B_{m-n}$ , sans risque d'ambiguïté, nous utilisons la même notation de coordonnée  $x$  pour éviter d'alourdir les notations. Nous comprendrons aussi que  $x = x_m$  et  $x = x_n$  signifient que nous évaluons les fonctions aux extrémités de la branche en question. Étant donné que, dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement aux réseaux électriques uniformes, pour simplifier les notations, nous omettons la dépendance en coordonnée de distance électrique  $x$  pour tout paramètre indépendant de  $x$  et nous posons,

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega) = \frac{Y_{c_{2-m}}(\omega) - Y_{s,m}(\omega)}{Y_{c_{2-m}}(\omega) + Y_{s,m}(\omega)} \quad (4.2)$$

où  $Y_{c_{2-m}}(\omega) = \sqrt{(G_{2-m} + j\omega C_{2-m})/(R_{2-m} + j\omega L_{2-m})}$  et  $Y_{s,m}(\omega)$  représentent respectivement l'admittance caractéristique de la branche  $B_{2-m}$  et l'admittance de la charge connecté aux noeuds  $N_m$ .

**Remarque 19.** Les coefficients  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$  et  $\rho_{r,2-m}(\omega)$ , défini par (3.2), coïncident dans le cas sans perte et en haute fréquence.

En fonction des caractéristiques des branches et des coefficients  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$ , on peut vérifier par des calculs directs que la solution explicite de l'équation différentielle de Riccati (4.1), évaluée au noeud central  $N_2$  ( $x = x_2$ ), s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, Y_{ap_{2-m}}(\omega, x_2) = Y_{c_{2-m}}(\omega) \frac{e^{2\tilde{\gamma}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)}{e^{2\tilde{\gamma}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)} \quad (4.3)$$

où la constante de propagation normalisée  $\tilde{\gamma}_{2-m}$  est définie par,

$$\tilde{\gamma}_{2-m}(\omega) = c_{0_{2-m}}\gamma_{2-m}(\omega) = c_{0_{2-m}}\sqrt{(G_{2-m} + j\omega C_{2-m})(R_{2-m} + j\omega L_{2-m})} \quad (4.4)$$

Elle est exprimée en fonction du coefficient d'atténuation  $\tilde{\alpha}_{2-m}$  et de dispersion  $\tilde{\beta}_{2-m}$  comme suite :

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, \tilde{\gamma}_{2-m}(\omega) = \tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) + j\tilde{\beta}_{2-m}(\omega) \quad (4.5)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{2-m}(\omega) &= \frac{c_{0_{2-m}}}{\sqrt{2}} \sqrt{-R_{2-m}G_{2-m} + \omega^2 L_{2-m}C_{2-m} + \sqrt{(R_{2-m}^2 + \omega^2 L_{2-m}^2)(G_{2-m}^2 + \omega^2 C_{2-m}^2)}} \\ \tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) &= \omega c_{0_{2-m}}^2 \frac{R_{2-m}C_{2-m} + L_{2-m}G_{2-m}}{2\tilde{\beta}_{2-m}(\omega)} \end{aligned} \quad (4.6)$$



## 72 Chapitre 4. Etude du problème inverse d'un réseau électrique étoile

Dans la suite, nous omettons la dépendance des admittances  $Y_{ap_{2-m}}$  en coordonnée  $x_2$ , c'est-à-dire,  $Y_{ap_{2-m}}(\omega) := Y_{ap_{2-m}}(\omega, x_2)$ .

**Proposition 5.** *Considérons un réseau électrique en étoile formé de branches uniformes. L'admittance apparente au noeud central  $Y_{ap_{N_2}}$  est donnée par :*

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) := \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} Y_{ap_{2-m}}(\omega) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} Y_{c_{2-m}}(\omega) \frac{e^{2\tilde{\gamma}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)}{e^{2\tilde{\gamma}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)} \quad (4.7)$$

**Preuve de la Proposition 5 .** La preuve est immédiate d'après la condition au noeud  $N_2$  donnée par (3.11) et l'expression explicite de l'admittance apparente de chaque branche  $B_{2-m}$ , définie par (4.3).  $\square$

L'expression explicite de l'admittance apparente au noeud central  $Y_{ap_{N_2}}$  est exprimée en fonction des admittances caractéristiques, des constantes de propagation, des longueurs en distances électriques des branches et des impédances (ou admittances) de charges connectées aux noeuds  $N_m$  pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ .

La solution du problème inverse considéré dans ce chapitre consiste à exploiter l'expression explicite (4.7) pour estimer le nombre de branches du réseau en étoile, les longueurs en distances électriques  $l_{2-m}$  et les coefficients de pertes  $Q_{2-m}$  [101] définis pour les branches uniformes ainsi :

$$Q_{2-m} = \frac{1}{2} \left( \frac{R_{2-m}}{L_{2-m}} + \frac{G_{2-m}}{C_{2-m}} \right) l_{2-m} \quad \text{en Hz.m} \quad (4.8)$$

Nous allons présenter l'algorithme d'identification qui est basé sur l'exploitation de l'expression de l'admittance apparente (4.7) sous les hypothèses suivantes :

**H 14.** *Pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , les branches  $B_{2-m}$  ont la même impédance caractéristique en haute fréquence  $\zeta_{\infty_{2-m}}$ .*

**H 15.** *Pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , les impédances de charges  $Z_m$  sont réelles<sup>3</sup>, identiques et elles ne sont pas adaptées aux branches.*

**H 16.** *Pour  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , la dispersion dans les branches  $B_{2-m}$  est négligeable.*

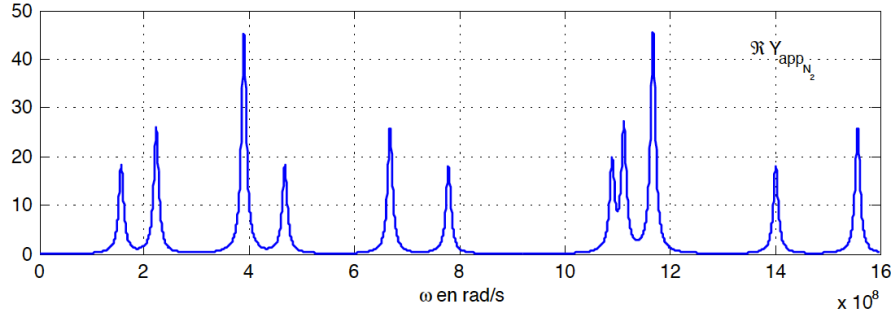
**H 17.** *Les caractéristiques de la branche de test sont connues.*

### Remarque 20.

- Les termes de pertes  $R_{2-m}$  et  $G_{2-m}$  ne sont pas nécessairement identiques pour toutes les branches  $B_{2-m}$ .
- En pratique, la façon la plus simple pour assurer la charge identique connectée à toutes les branches, sauf la branche de test, est de laisser les branches en circuit ouvert (charges infinies) sur les noeuds terminaux  $N_m$ .

---

3. Dans ce cas, les impédances de charges connectées aux noeuds terminaux sont des résistance.

FIGURE 4.2 – Partie réelle de l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$ .

### 4.3 Etude du problème inverse via l'admittance

Comme illustrée dans la Figure 4.2, la courbe de la partie réelle de l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  en fonction de  $\omega$  comporte une série de pics qui est due au phénomène de résonance qui est relié aux longueurs des branches  $B_{2-m}$ .

L'idée de la méthode itérative que nous allons présenter est d'utiliser, d'une part, la relation entre les maximums des pics de la courbe de la partie réelle de l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  et les longueurs en distances électriques des branches, et d'autre part, le fait que  $Y_{ap_{N_2}}$  se décompose en une somme (que confère (4.7)) dont chaque terme correspond à une branche pour estimer une à une les longueurs de branches. Dans la présente section, nous présentons la relation qui relie la longueur en distance électrique  $l_{2-m}$  de chaque branche  $B_{2-m}$  et les pulsations  $\omega$  correspondant aux maximums de la partie réelle de l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$ . Afin d'être plus explicite dans la façon d'identifier les longueurs des branches via la méthode itérative, nous allons expliquer le processus itératif en utilisant l'exemple de la Figure 4.2.

#### 4.3.1 Etude de l'admittance au noeud central

Considérons l'admittance  $Y_{ap_{2-m}}$  associée à une branche  $B_{2-m}$  et définie par la relation (4.3). En utilisant l'expression de  $\tilde{\gamma}_{2-m}$  en fonction des coefficients d'atténuation  $\tilde{\alpha}_{2-m}$  et de dispersion  $\tilde{\beta}_{2-m}$ , nous réexprimons l'admittance  $Y_{ap_{2-m}}$  ainsi :

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, \quad Y_{ap_{2-m}}(\omega) = Y_{c_{2-m}}(\omega) \frac{e^{2(\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) + j\tilde{\beta}_{2-m}(\omega))l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)}{e^{2(\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) + j\tilde{\beta}_{2-m}(\omega))l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)} \quad (4.9)$$

La dépendance de l'admittance caractéristique et des termes de dispersion et d'atténuation en pulsation  $\omega$  d'une manière non linéaire complique l'étude de l'admittance  $Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  pour déterminer les maximums de sa partie réelle. Nous simplifions donc ces coefficients sous certaines hypothèses.

**Phénomène de dispersion :** Nous rappelons que la dispersion des ondes est susceptible de créer la distorsion du signal transmis, c'est-à-dire, sa déformation.

## 74 Chapitre 4. Etude du problème inverse d'un réseau électrique étoile

D'après la théorie des circuits [100], la condition nécessaire et suffisante pour éviter la distorsion d'un signal passant à travers un filtre linéaire représenté par une fonction de transfert

$$F_{2-m}(\omega) = A(\omega)e^{-j\psi_{2-m}(\omega)} \quad (4.10)$$

est que la phase  $\psi_{2-m}(\omega)$  soit une fonction linéaire de la pulsation  $\omega$ .

$$\psi_{2-m}(\omega) = a\omega, \text{ avec } a \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

Cette fonction de transfert nous permet de reproduire le signal d'entrée sans distorsion mais retardé par un délai  $a$ . Dans le cas d'une branche  $B_{2-m}$  sans pertes, de longueur en distance électrique  $l_{2-m}$ , le coefficient de réflexion qui est exprimé par (3.24) et qui est vu comme une fonction de transfert, satisfait la relation (4.11). Nous avons donc  $a = 2l_{2-m}$ .

En présence des pertes, nous avons la distorsion sauf dans le cas particulier où

$$\frac{R_{2-m}}{L_{2-m}} = \frac{G_{2-m}}{C_{2-m}} \quad (4.12)$$

Sous cette condition, l'admittance caractéristique et les coefficients de dispersion et d'atténuation se simplifient. En effet, nous avons,

$$\begin{aligned} \gamma_{2-m}(\omega) &= \sqrt{(R_{2-m} + j\omega L_{2-m})(G_{2-m} + j\omega C_{2-m})} \\ &= j\omega \sqrt{L_{2-m}C_{2-m}} \sqrt{\left(1 + \frac{R_{2-m}}{j\omega L_{2-m}}\right) \left(1 + \frac{G_{2-m}}{j\omega C_{2-m}}\right)} \\ &= j\omega \sqrt{L_{2-m}C_{2-m}} \sqrt{\left(1 + \frac{R_{2-m}}{j\omega L_{2-m}}\right)^2} \end{aligned}$$

d'après la définition de la constante de propagation (4.4), nous avons,

$$\alpha_{2-m}(\omega) = \sqrt{L_{2-m}C_{2-m}} \frac{R_{2-m}}{L_{2-m}}; \quad \beta_{2-m}(\omega) = \omega \sqrt{L_{2-m}C_{2-m}} \quad (4.13)$$

nous obtenons donc une expression de  $\tilde{\alpha}_{2-m}$  indépendant de  $\omega$  et une expression linéaire en  $\omega$  pour le coefficient de dispersion  $\tilde{\beta}_{2-m}$  tels que :

$$\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) = \frac{R_{2-m}}{L_{2-m}}; \quad \tilde{\beta}_{2-m}(\omega) = \omega \quad (4.14)$$

L'admittance caractéristique  $Y_{c_{2-m}}$  se simplifie comme suit :

$$Y_{c_{2-m}}(\omega) = \sqrt{\frac{G_{2-m} + j\omega C_{2-m}}{R_{2-m} + j\omega L_{2-m}}} = \sqrt{\frac{C_{2-m}}{L_{2-m}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{G_{2-m}}{j\omega C_{2-m}}}{1 + \frac{R_{2-m}}{j\omega L_{2-m}}}} = \sqrt{\frac{C_{2-m}}{L_{2-m}}} \quad (4.15)$$

Elle est égale à l'admittance caractéristique en haute fréquence  $Y_{\infty_{2-m}}$  et elle est indépendante de la pulsation  $\omega$ . Dans la suite, nous faisons donc l'hypothèse **H16** afin de considérer les relations d'approximation (4.14) et (4.15).

**Remarque 21.**

- En pratique, nous supposons que les branches sont telles que les dispersions sont négligeables, ce qui nous permet d'utiliser approximativement la relation (4.14) pour simplifier les calculs et appliquer la méthode d'identification.
- Sous les hypothèses **H15** et **H16**, le coefficient  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$  est un réel non nul qui ne dépend pas de la pulsation  $\omega$ .

En tenant compte des hypothèses **H15** et **H16**, par un simple calcul, nous montrons que l'admittance apparente  $Y_{ap_{2-m}}$  vérifie,

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}, Y_{ap_{2-m}}(\omega) = \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega) + \Im Y_{ap_{2-m}}(\omega) \quad (4.16)$$

où  $\Re f_{2-m}$  et  $\Im f_{2-m}$  représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'admittance  $Y_{ap_{2-m}}$  telles que :

$$\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega) = Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{4\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2(\omega)}{|e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)e^{-2j\tilde{\beta}_{2-m}(\omega)l_{2-m}}|^2} \quad (4.17)$$

$$\Im Y_{ap_{2-m}}(\omega) = Y_{\infty_{2-m}} \frac{2\tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega) \sin(2\tilde{\beta}_{2-m}(\omega)l_{2-m})e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega)l_{2-m}}}{|e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega)l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}(\omega)e^{-2j\tilde{\beta}_{2-m}(\omega)l_{2-m}}|^2} \quad (4.18)$$

où  $\tilde{\alpha}_{2-m}$  et  $\tilde{\beta}_{2-m}$  sont définis par les relations de (4.14).

D'après la définition de l'admittance au noeud central  $Y_{ap_{N_2}}$ , nous réécrivons la relation (4.7) ainsi :

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) = \Re Y_{ap_{N_2}}(\omega) + \Im Y_{ap_{N_2}}(\omega) \quad (4.19)$$

$$\text{où } \Re Y_{ap_{N_2}}(\omega) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega) \text{ et } \Im Y_{ap_{N_2}}(\omega) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \Im Y_{ap_{2-m}}(\omega).$$

Avant d'illustrer le processus itératif sur l'exemple de la Figure 4.2, nous nous intéressons à la relation qui relie les pulsations correspondantes aux maximums de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$  et les longueurs en distances électriques des branches  $B_{2-m}$ .

**4.3.2 La relation "pulsation - longueur"**

Avant d'étudier les maximums de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$ , nous étudions les extremums des fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  associées aux branches  $B_{2-m}$ .

**Etude des extremums des fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  :** Considérons la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  définie par la relation (4.17). Sous les hypothèses **H15** et **H16**, nous réécrivons la relation (4.17) ainsi :

$$\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega) = Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{4\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2}{|e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}e^{-2j\omega l_{2-m}}|^2} \quad (4.20)$$

## 76 Chapitre 4. Etude du problème inverse d'un réseau électrique étoile

Pour étudier les extremums de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  définie par (4.20), nous étudions leurs dérivées par rapport à la pulsation  $\omega$ . La dérivée première est donnée par :

$$\frac{d\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)}{d\omega} = Y_{\infty_{2-m}} \frac{4\tilde{\rho}_{r,2-m} l_{2-m} e^{2\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} (e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2) \sin(2\omega l_{2-m})}{|e^{2\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m} e^{-2j\omega l_{2-m}}|^4} \quad (4.21)$$

En présence des pertes, nous avons <sup>4</sup>,

$$\forall \tilde{\rho}_{r,2-m} \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad (e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2) \neq 0 \quad (4.22)$$

Les extremums de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  sont donc atteints pour les pulsations  $\omega$  telles que  $\sin(2\omega l_{2-m}) = 0$ , c'est-à-dire,

$$\omega = \frac{k\pi}{2l_{2-m}}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \quad (4.23)$$

Lors de cette étude, la notation  $\omega_{2-m}^k = \frac{k\pi}{2l_{2-m}}$  est associée à la pulsation correspondante au  $k^{\text{ème}}$  extremum de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$ .

Afin d'étudier la nature des extremums, nous analysons la dérivée seconde de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  aux pulsations  $\omega_{2-m}^k$ . Nous avons,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left. \frac{d^2 \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)}{d^2 \omega} \right|_{\omega=\omega_{2-m}^k} = Y_{\infty_{2-m}} \frac{8\tilde{\rho}_{r,2-m} l_{2-m}^2 e^{2\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} (e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2) (-1)^k}{|e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}(\omega) l_{2-m}} + (-1)^k \tilde{\rho}_{r,2-m}|^4} \quad (4.24)$$

Nous montrons que la nature des extremums, associés aux pulsations  $\omega_{2-m}^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , dépend du signe de  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$ . Dans le Tableau 4.3.2, nous avons la nature des extremums de la partie réelle  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  selon le signe du coefficient  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$  et la parité de l'entier  $k$ .

$\tilde{\rho}_{r,2-m} \in \mathbb{R} \backslash k$	k	paire ( $k = 2k'$ )	impaire ( $k = 2k' + 1$ )
positive		minimum	maximum
négative		maximum	minimum

TABLE 4.1 – Nature des extremums de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  associés aux  $\omega_{2-m}^k$ .

Dorénavant, nous nous intéresserons uniquement aux maximums des fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$ , c'est-à-dire, aux pulsations  $\omega_{2-m}^{2k'+1}$  et  $\omega_{2-m}^{2k'}$  pour  $k' \in \mathbb{N}$  respectivement quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  et  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ .

### Remarque 22.

4. Si  $R_{2-m} > 0$ , nous avons  $\tilde{\alpha}_{2-m} > 0$  et  $e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} > 1$ . D'où  $(e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2) \neq 0$  pour tout  $\tilde{\rho}_{r,2-m} \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ .

- Les pulsations  $\omega_{2-m}^k$ , associées à une branche  $B_{2-m}$ , sont reliées à la longueur géométrique  $\ell_{2-m}$  par la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \omega_{2-m}^k = \frac{k\pi}{2c_{0_{2-m}}\ell_{2-m}} \quad (4.25)$$

- Considérons deux branches  $B_{2-m_1}$  et  $B_{2-m_2}$ .  
Si  $\ell_{2-m_1} < \ell_{2-m_2}$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}, \omega_{2-m_1}^k > \omega_{2-m_2}^k$ .
- Aux pulsations  $\omega_{2-m}^k$ , la partie imaginaire de  $Y_{ap_{2-m}}$  est nulle.

$$\Im Y_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^k) = 0 \quad (4.26)$$

**Etude des extremums de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}$  :** À ce stade ci, nous avons fait des hypothèses sur les caractéristiques internes de chaque branche du réseau en étoile. Dans la suite, nous faisons les hypothèses ci-dessous afin d'appliquer la méthode d'identification d'une manière efficace.

**H 18.** Les pics des branches  $B_{2-m}$  sont suffisamment éloignés entre eux de telle sorte que les pics de la somme soient approximativement l'ensemble des pics des branches.

**H 19.** La borne inférieure  $l_{inf}$  et la borne supérieure  $l_{sup}$  des longueurs des branches du réseau sont connues.

Considérons l'admittance apparente définie au noeud central par la relation (4.19). Nous avons,

$$\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega) \quad (4.27)$$

Sous l'hypothèse **H 18**, la relation (4.27) nous permet d'éliminer successivement les pics associés aux fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$ .

**Remarque 23.** D'après des calculs similaires, nous montrons que les extremums des modules  $|Y_{ap_{2-m}}|$  sont atteints également aux pulsations  $\omega_{2-m}^k$ . Nous avons choisi l'utilisation de la partie réelle pour la raison suivante :

$$|Y_{ap_{N_2}}(\omega)| \leq \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} |Y_{ap_{2-m}}(\omega)| \quad (4.28)$$

Soient  $l_{inf}$  et  $l_{sup}$  respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des longueurs des branches du réseau. Sous l'hypothèse **H19** et d'après la relation (4.23) qui relie les longueurs en distances électriques et les pulsations  $\omega$ , nous avons,

$$\forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\} \text{ telles que } l_{inf} \leq \ell_{2-m} \leq l_{sup} \quad (4.29)$$

donc, les pulsations non nulles correspondantes aux premiers pics des fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  vérifient :

$$\omega_{inf}^+ \leq \omega_{2-m}^1 \leq \omega_{sup}^+ \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0 \quad (4.30)$$

$$\omega_{inf}^- \leq \omega_{2-m}^2 \leq \omega_{sup}^- \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0 \quad (4.31)$$

où  $\omega_{sup}^+$  et  $\omega_{sup}^-$  (resp.  $\omega_{inf}^+$  et  $\omega_{inf}^-$ ) représentent respectivement la borne supérieure (resp. inférieure) des pulsations quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  et  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ . Elles sont définies par :

$$\omega_{sup}^+ = \frac{\pi}{2l_{inf}}; \quad \omega_{inf}^+ = \frac{\pi}{2l_{sup}}; \quad \omega_{sup}^- = \frac{\pi}{l_{inf}}; \quad \omega_{inf}^- = \frac{\pi}{l_{sup}} \quad (4.32)$$

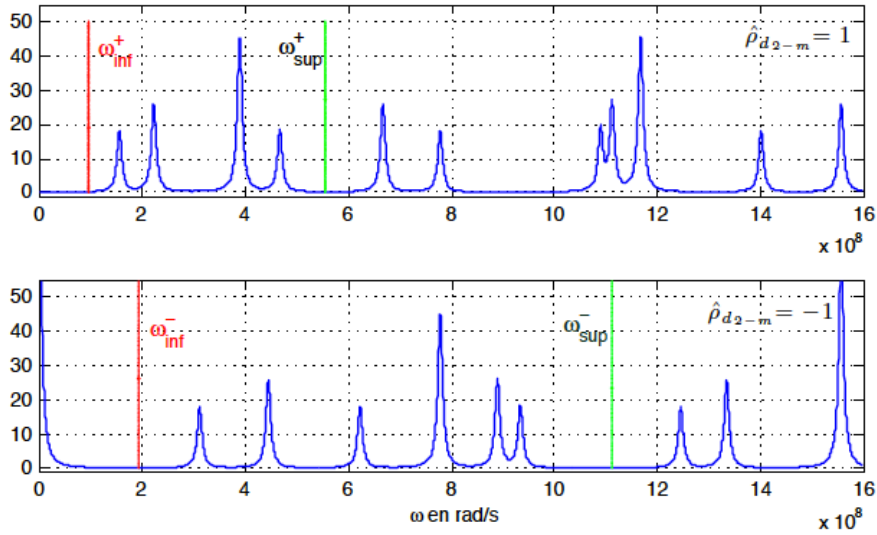


FIGURE 4.3 – Exemple de  $\Re Y_{ap_{N_2}}$  définie sur  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  (resp.  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ ) quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$  (resp.  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = -1$ ).

Suite aux relations (4.30) et (4.31), pour identifier les longueurs des branches, nous tronquons l'intervalle des pulsations  $\omega$  et nous nous intéressons uniquement à la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$  définie initialement sur l'intervalle  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  (resp.  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ ) quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  (resp.  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ ). Nous allons donc travailler sur une plage de pulsation limitée qui est représentée par l'intervalle tronqué  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  (ou  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ ). Les pics qui apparaissent dans l'intervalle tronqué sont associés à l'ensemble des pulsations  $\omega_{2-m}^1$  (resp.  $\omega_{2-m}^2$ ) et ses multiples quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  (resp.  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ ). Numériquement, nous avons constaté que le maximum des pics dans l'intervalle tronqué correspond toujours à une vraie longueur des branches du réseau. La Figure 4.3 représente deux exemples de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$  associées à un réseau électrique en étoile formé de cinq branches (quatre branches en excluant la branche de test). Elles sont définies sur les intervalles  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  et  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$  respectivement

quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$  et  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = -1$ .

Quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$ , nous avons quatre pics dans l'intervalle  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  qui nous permet d'estimer les longueurs des quatre branches du réseau<sup>5</sup>.

Quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} = -1$ , dans l'intervalle  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ , nous avons cinq pics où le quatrième correspond à une pulsation  $\omega_{2-m}^5$  multiple de la pulsation  $\omega_{2-m}^2$ <sup>6</sup>.

Dans ces deux exemples, la longueur de chaque branche peut correspondre à plusieurs pics de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$ , mais chaque pic de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$ , dans l'intervalle tronqué, correspond à une seule longueur d'une des branches du réseau. Dans le cas général, des pics correspondant à des branches différentes peuvent coïncider. En effet, s'il existe deux entiers naturels non nuls  $n_1$  et  $n_2$  tels que pour deux longueurs des branches  $l_{2-m_1}$  et  $l_{2-m_2}$ , nous avons,

$$n_2 l_{2-m_1} = n_1 l_{2-m_2} \quad (4.33)$$

alors, d'après la définition des pulsations associées aux pics (4.23), nous obtenons au moins un pic qui correspond aux multiples des deux longueurs  $l_{2-m_1}$  et  $l_{2-m_2}$ .

Afin de garantir que les pics associés à une seule branche, il faudrait supposer que les longueurs  $l_{2-m_1}$  et  $l_{2-m_2}$  sont telles qu'il n'existe pas d'entiers  $n_1$  et  $n_2$  qui satisfont la relation (4.33), ce qui reviendrait à supposer que le ratio  $l_{2-m_2}/l_{2-m_1}$  est irrationnel. Etant donné que tout nombre irrationnel peut être approché de manière arbitrairement précise par des nombres rationnels, cette condition ne semble pas raisonnable. En pratique nous tronquons l'intervalle de fréquence en fonction des bornes supposées des longueurs de branches  $l_{inf}$  et  $l_{sup}$ , donc, nous devons considérer uniquement les entiers naturels  $n_1 > 1$  et  $n_2 > 1$  tels que :

$$n_2 l_{2-m_1} > l_{sup} \text{ et } n_1 l_{2-m_2} > l_{sup} \quad (4.34)$$

ce qui conduit à l'hypothèse plus réaliste suivante :

**H 20.** Pour tout  $m_1$  et  $m_2$  dans  $\mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , s'il existe deux entiers naturels  $n_1 > 1$  et  $n_2 > 1$  tels que  $n_2 l_{2-m_1} = n_1 l_{2-m_2}$ , alors,  $n_2 l_{2-m_1} > l_{sup}$  et  $n_1 l_{2-m_2} > l_{sup}$ .

En tenant compte de l'hypothèse ci-dessus, nous assurons que chaque maximum de pic se trouvant dans l'intervalle tronqué correspond à une seule longueur de branches du réseau. Pour des longueurs de branches assez différentes, les maximums de la fonction  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$  sont donc atteints sur l'ensemble des pulsations  $\{\omega_{2-m}^1\}_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}}$  (resp.  $\{\omega_{2-m}^2\}_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}}$ ) quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  (resp.  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ ).

Le processus itératif qui prend le maximum des pics dans chaque itération, permet d'estimer les longueurs des branches dans un ordre croissant. En effet, sous les hypothèses **H15** et **H16**, aux pulsations  $\omega_{2-m}^k$  définies pas (4.23), les fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  associées aux branches  $B_{2-m}$  vérifient :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^k) = Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{4\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}^2}{\left( e^{2\tilde{\alpha}_{2-m} l_{2-m}} + (-1)^k \tilde{\rho}_{r,2-m} \right)^2} \quad (4.35)$$

5. Dans ce cas particulier, nous n'avons pas besoin de la méthode itérative.

6. Nous avons  $\omega_{2-m}^5 = 2\omega_{2-m}^2$



Selon le signe de  $\tilde{\rho}_{r,2-m}$ ,  $\forall k' \in \mathbb{N}$ , les maximums de  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  vérifient,

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0, \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^{2k'+1}) &= Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}} \\ &= Y_{\infty_{2-m}} \left( 1 + \frac{2\tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0, \Re Y_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^{2k'}) &= Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}} \\ &= Y_{\infty_{2-m}} \left( 1 - \frac{2\tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\tilde{\alpha}_{2-m}l_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

D'après les relations (4.36) et (4.37), nous constatons que les amplitudes des pics des fonctions  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  dépendent uniquement des longueurs  $l_{2-m}$ . En effet, plus les longueurs  $l_{2-m}$  des branches croissent, plus les amplitudes des pics de la fonction  $\Re Y_{ap_{2-m}}(\omega)$  décroissent. Maintenant, nous allons étendre ces résultats obtenus pour la partie réelle  $\Re Y_{ap_{2-m}}$  à la partie réelle de la somme  $\Re Y_{ap_{N_2}}(\omega)$ .

**Conclusion :** Pour conclure cette section, nous mettons au clair les relations qui permettent d'estimer une première longueur en distance électrique d'une des branches du réseau. En effet, pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , les longueurs en distances électriques estimées sont notées par  $\hat{l}_{2-m}$  et elles sont données par les relations suivantes :

$$\hat{l}_{2-m=\frac{\pi}{2}(\omega_{2-m}^1)^{-1}} \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0 \quad (4.38)$$

$$\hat{l}_{2-m=\pi(\omega_{2-m}^2)^{-1}} \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0 \quad (4.39)$$

où  $\omega_{2-m}^1$  (ou  $\omega_{2-m}^2$ ) est associé au pic d'amplitude maximale.

**Récapitulation des hypothèses :** Afin de pouvoir estimer ces longueurs, nous avons utilisé les hypothèses suivantes :

Pour tout  $m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ ,

**H14** Les branches  $B_{2-m}$  ont la même impédance caractéristique en haute fréquence  $\zeta_{\infty_{2-m}}$ .

**H15** Les impédances de charges  $Z_m$  sont identiques et elles ne sont pas adaptées.

**H16** La dispersion dans les branches  $B_{2-m}$  est négligeable.

**H17** Les caractéristiques de la branche de test sont connues.

**H18** Les pics des branches  $B_{2-m}$  sont suffisamment éloignés entre eux de telle sorte que les pics de la somme soient approximativement l'ensemble des pics des branches.

**H19** La borne inférieure  $l_{inf}$  et la borne supérieure  $l_{sup}$  des longueurs des branches du réseau sont connues.

**H20** Pour tout  $m_1$  et  $m_2$  dans  $\mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}$ , s'il existe deux entiers naturels  $n_1 > 1$  et  $n_2 > 1$  tels que  $n_2 l_{2-m_1} = n_1 l_{2-m_2}$  alors,  $n_2 l_{2-m_1} > l_{sup}$  et  $n_1 l_{2-m_2} > l_{sup}$ .

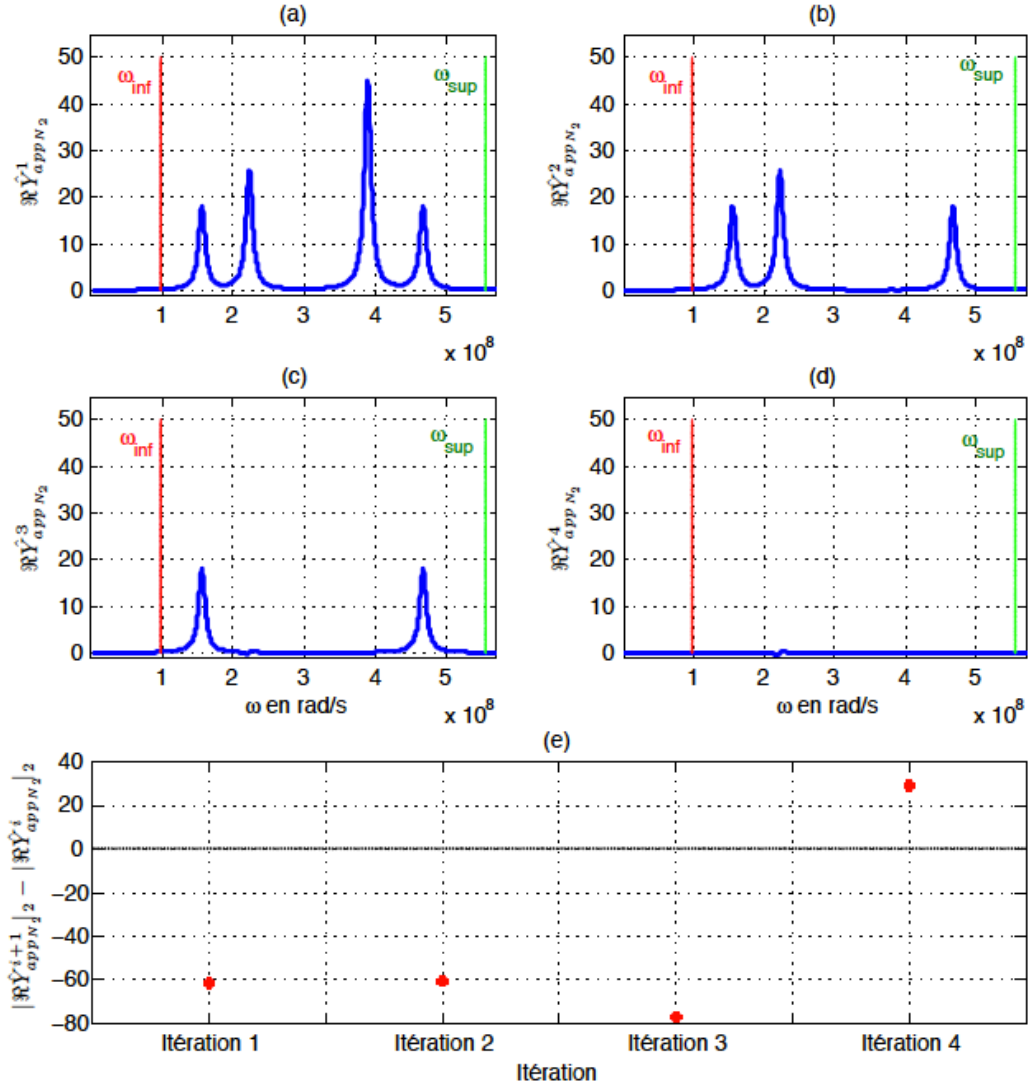


FIGURE 4.4 – Processus de la méthode itérative sur un exemple.

### 4.3.3 Processus de la méthode itérative illustré sur un exemple

Nous illustrons le processus itératif sur un exemple d'un réseau électrique composé de 4 branches uniformes dont la branche de test est supposée connue. La Figure 4.2 représente la partie réelle de l'admittance  $Y_{ap N_2}$  qui est définie au noeud central du réseau. Nous supposons que les extrémités des branches  $B_{2-m}$ , pour  $m \in \{3, 4, 5\}$ , sont en circuit ouvert ( $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$ ). Nous supposons également connaître d'avance les bornes de la plus petite et la plus grande longueur des branches pour déterminer l'intervalle de pulsation tronqué  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$ .

Lors de la première itération, nous nous intéressons à la fonction  $\hat{Y}_{ap N_2}^1(\omega)$  qui

est présentée dans la Figure 4.4-(a), telle que  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega) = Y_{ap_{N_2}}(\omega)$  sur l'intervalle tronqué. Nous déterminons la pulsation  $\omega_{2-m_1}^1$ , associée au pic d'amplitude maximale pour estimer une première longueur d'une des branches du réseau, notée  $\hat{l}_{2-m_1}$ . A l'aide du pic d'amplitude maximale, nous estimons le coefficient de perte associé à la branche  $B_{2-m_1}$  que l'on note  $\hat{Q}_{2-m_1}$  (voir Section 4.4.2.2) et nous calculons l'admittance apparente estimée  $\hat{Y}_{ap_{2-m_1}}$  de la même branche en fonction de  $\hat{Q}_{2-m_1}$  et  $\hat{l}_{2-m_1}$ . Avant de passer à la deuxième itération, nous calculons une nouvelle admittance  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^2$  telle que,

$$\hat{Y}_{ap_{N_2}}^2(\omega) = \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega) - \hat{Y}_{ap_{2-m_1}} \quad (4.40)$$

et nous testons le critère d'arrêt du processus itératif en comparant les normes  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^1\|_{L_2(\mathbb{C})}$  et  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^2\|_{L_2(\mathbb{C})}$ .

Nous quitterions le processus itératif si " $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^2\|_{L_2(\mathbb{C})} - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^1\|_{L_2(\mathbb{C})} > 0$ ", ce qui n'est pas le cas dans cet exemple.

**Remarque 24.** Dans l'étape décrite par la relation (4.40), nous avons éliminé le pic d'amplitude maximale dans la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1$ .

Lors de la deuxième itération, nous utilisons la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^2(\omega)$  qui est présentée dans la Figure 4.4-(b). Avec le même principe utilisé dans la première itération, nous localisons le pic d'amplitude maximale de la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^2(\omega)$  pour estimer une deuxième longueur  $\hat{l}_{2-m_2}$ , un coefficient de perte  $\hat{Q}_{2-m_2}$  et une admittance  $\hat{Y}_{ap_{2-m_2}}$ . Nous calculons également une nouvelle fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^3(\omega)$  telle que  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^3(\omega) = \hat{Y}_{ap_{N_2}}^2(\omega) - \hat{Y}_{ap_{2-m_2}}$  et nous calculons  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^3\|_{L_2(\mathbb{C})} - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^2\|_{L_2(\mathbb{C})}$  pour vérifier le critère d'arrêt du processus itératif. D'après la Figure 4.4-(c) qui représente les valeurs du critère d'arrêt, nous passons à la troisième itération.

Lors de la troisième itération, nous utilisons la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^3(\omega)$  qui est présentée dans la Figure 4.4-(c). Nous localisons le pic d'amplitude maximale pour estimer une longueur  $\hat{l}_{2-m_3}$ , un coefficient de perte  $\hat{Q}_{2-m_3}$  et une admittance  $\hat{Y}_{ap_{2-m_3}}$ . Nous calculons la fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^4(\omega)$  telle que  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^4(\omega) = \hat{Y}_{ap_{N_2}}^3(\omega) - \hat{Y}_{ap_{2-m_3}}$  et nous vérifions le critère d'arrêt. D'après la Figure 4.4-(d), nous avons toujours  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^4\|_{L_2(\mathbb{C})} - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^3\|_{L_2(\mathbb{C})} < 0$ . Donc, nous passons à la quatrième itération et nous utilisons la fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^4(\omega)$  qui est présentée dans la Figure 4.4-(d).

Dans de cette itération, nous estimons également une quatrième longueur  $\hat{l}_{2-m_4}$  et un coefficient de perte  $\hat{Q}_{2-m_4}$  et nous calculons une nouvelle fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^5$ . Après la vérification du critère d'arrêt, nous quittons donc le processus itératif et nous ne retenons que les trois premières longueurs et les coefficients de pertes estimés.

## 4.4 Description de de la méthode itérative

La présente méthode itérative d'inversion, proposée pour la résolution du problème inverse, consiste à identifier le nombre total des branches et à estimer leur longueur ainsi que leur coefficient de pertes. Dans cette section, nous décrivons les étapes de la méthode itérative qui sont illustrées dans le schéma simplifié de la Figure 4.5.

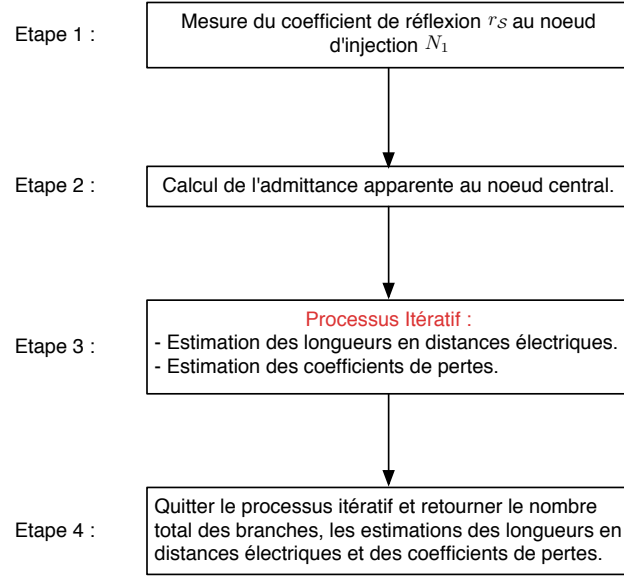


FIGURE 4.5 – Etapes principales de la méthode itérative.

### 4.4.1 Calcul de l'admittance apparente au noeud central

Avant d'entamer le processus itératif de la méthode d'identification, nous expliquons le calcul de l'admittance apparente  $Y_{ap_{N_2}}$  au noeud central à partir des mesures au noeud d'injection  $N_1$ .

Comme nous avons pu voir dans le chapitre précédent, en pratique, nous mesurons le coefficient de réflexion du réseau en étoile au noeud d'injection  $N_1$ . A l'aide de cette mesure et en connaissant les caractéristiques de la branche de test d'après l'hypothèse **H17**, nous calculons l'admittance apparente  $Y_{ap_{N_2}}$  au noeud central.

**Proposition 6.** Soit  $r_S$ , le coefficient de réflexion au noeud  $N_1$  d'un réseau électrique en étoile. Sous l'hypothèse **H17**, l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  est donnée par :

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) = Y_{\infty_{1-2}} \frac{1 - \rho_{r,1-2}(\omega)}{1 + \rho_{r,1-2}(\omega)} \text{ avec } \rho_{r,1-2}(\omega) = \frac{T_2(\omega, x_1) + T_3(\omega, x_1)r_S(\omega)}{T_1(\omega, x_1) - T_2(\omega, x_1)r_S(\omega)} \quad (4.41)$$

où  $Y_{\infty_{1-2}}$  représente l'admittance caractéristique de la branche de test en haute fréquence et les coefficients  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont exprimés en fonction des caractéristiques

de la branche  $B_{1-2}$  ainsi :

$$\begin{cases} T_1(\omega, x_1) &= \tilde{\gamma}_{1-2}^{-1}(\omega)(q_{d1-2} + j\omega) + \tanh^{-1}(-\tilde{\gamma}_{1-2}(\omega)l_{1-2}) \\ T_2(\omega, x_1) &= \tilde{\gamma}_{1-2}^{-1}(\omega)q_{ds1-2} \\ T_3(\omega, x_1) &= -\tilde{\gamma}_{1-2}^{-1}(\omega)(q_{d1-2} + j\omega) + \tanh^{-1}(-\tilde{\gamma}_{1-2}(\omega)l_{1-2}) \end{cases} \quad (4.42)$$

**Remarque 25.** Dans le cas d'une branche de test sans perte, la définition (4.41) devient,

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) = Y_{\infty_{1-2}} \frac{1 - r_S(\omega)e^{2j\omega l_{1-2}}}{1 + r_S(\omega)e^{2j\omega l_{1-2}}} \quad (4.43)$$

**Preuve de la Proposition 6 .** Considérons le coefficient de réflexion  $r_S$  du réseau électrique en étoile, mesuré au noeud d'injection  $N_1$ . D'après la relation (3.20), ce coefficient vérifie,

$$r_S(\omega) = \frac{T_1(\omega, x_1)\rho_{r,1-2}(\omega) - T_2(\omega, x_1)}{T_2(\omega, x_1)\rho_{r,1-2}(\omega) + T_3(\omega, x_1)} \quad (4.44)$$

où les coefficients  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont exprimés dans (4.42). D'après la définition (3.8), nous exprimons l'impédance apparente  $Z_{ap_{1-2}}$ , en fonction de  $\rho_{r,1-2}$ , ainsi :

$$Z_{ap_{1-2}}(\omega, x_2) = \zeta_{\infty_{1-2}} \frac{1 + \rho_{r,1-2}(\omega)}{1 - \rho_{r,1-2}(\omega)} \quad (4.45)$$

Au noeud central  $N_2$ , l'impédance apparente  $Z_{ap_{1-2}}(\omega, x_2)$  est vue comme l'impédance d'une charge connectée à ce noeud. Nous exprimons donc l'admittance apparente au noeud  $N_2$  ainsi :

$$Y_{ap_{N_2}}(\omega) := \frac{1}{Z_{ap_{1-2}}(\omega, x_2)} = Y_{\infty_{1-2}} \frac{1 - \rho_{r,1-2}(\omega)}{1 + \rho_{r,1-2}(\omega)} \quad (4.46)$$

□

**Remarque 26.** En pratique, il est possible d'estimer la distance électrique  $l_{1-2}$  à l'aide du réflectogramme associé au coefficient de réflexion  $r_S$  si la longueur de la branche de test est inconnue.

#### 4.4.2 Estimation des longueurs et des coefficients de pertes

Après avoir calculé l'admittance apparente  $Y_{ap_{N_2}}$ , nous commençons le processus itératif de la méthode d'identification. Nous notons  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$ , l'admittance apparente utilisée lors de la  $i^{\text{ème}}$  itération. A l'étape initiale, nous posons :

$$\hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega) = Y_{ap_{N_2}}(\omega)$$

#### 4.4.2.1 Estimation des longueurs en distances électriques

Lors d'une  $i^{\text{ème}}$  itération, dans un premier temps, nous utilisons la partie réelle de l'admittance  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$  pour estimer la  $i^{\text{ème}}$  longueur  $\hat{l}_{2-m_i}$  d'une des branches  $B_{2-m_i}$  en distance électrique par la relation (4.39) ou (4.38).

Toujours dans la  $i^{\text{ème}}$  itération, dans un second temps, nous calculons l'admittance apparente, notée  $\hat{Y}_{ap_{2-m_i}}$  qui est définie en fonction de la distance électrique estimée  $\hat{l}_{2-m_i}$  et du coefficient de perte estimé  $\hat{Q}_{2-m_i}$  comme suite :

$$\hat{Y}_{ap_{2-m_i}}(\omega) = Y_{\infty_{2-m_i}} \frac{e^{2\hat{Q}_{2-m_i} + 2j\omega\hat{l}_{2-m_i}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\hat{Q}_{2-m_i} + 2j\omega\hat{l}_{2-m_i}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}} \quad (4.47)$$

où  $\hat{Q}_{2-m}$  représente le coefficient de perte estimé que nous verrons plus loin dans cette section.

Pour préparer l'itération suivante, nous calculons la fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}(\omega)$  en soustrayant l'admittance  $\hat{Y}_{ap_{2-m_i}}$  de l'admittance totale  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$ . Nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\forall i \geq 1, \hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}(\omega) = \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega) - \hat{Y}_{ap_{2-m_i}}(\omega) \quad (4.48)$$

Cette soustraction permet d'éliminer la contribution de la branche estimée à la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$ , y compris les effets de réflexions multiples, grâce à la forme additive de l'admittance au noeud central.

#### 4.4.2.2 Estimation des coefficients de pertes

Lors de la  $i^{\text{ème}}$  itération, le coefficient de perte  $Q_{2-m_i}$  est estimé selon la connaissance ou non des paramètres linéiques des branches du réseau. En effet, si les paramètres  $RLGC_{2-m_i}$  sont connus, le coefficient de perte estimé est donné par :

$$\hat{Q}_{2-m_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{R_{2-m_i}}{L_{2-m_i}} + \frac{G_{2-m_i}}{C_{2-m_i}} \right) \hat{l}_{2-m_i} \quad (4.49)$$

Si les paramètres  $RLGC_{2-m_i}$  ne sont pas connus, nous estimons le coefficient de perte en analysant la fonction  $\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$  à la pulsation  $\omega_{2-m}^1$  quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  et à la pulsation  $\omega_{2-m}^2$  quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ .

**Proposition 7.** Soit  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$  l'admittance apparente utilisée lors de la  $i^{\text{ème}}$  itération. Sous l'hypothèse **H20**, nous avons les approximations suivantes des coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  :

$$\hat{Q}_{2-m} \approx \frac{1}{2} \ln \left( \tilde{\rho}_{r,2-m} \frac{\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega_{2-m}^1) + Y_{\infty_{2-m}}}{\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega_{2-m}^1) - Y_{\infty_{2-m}}} \right) \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0 \quad (4.50)$$

$$\hat{Q}_{2-m} \approx \frac{1}{2} \ln \left( -\tilde{\rho}_{r,2-m} \frac{\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega_{2-m}^2) + Y_{\infty_{2-m}}}{\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega_{2-m}^2) - Y_{\infty_{2-m}}} \right) \text{ si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0 \quad (4.51)$$

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous considérons l'admittance apparente  $Y_{ap_{N_2}}^1$ . Nous avons,

$$\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega_{2-m}^1) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^1) \quad \text{si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0 \quad (4.52)$$

$$\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega_{2-m}^2) = \sum_{m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\}} \Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^2) \quad \text{si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0 \quad (4.53)$$

Sous l'hypothèse **H20** et pour des longueurs assez différentes, au voisinage de  $\omega_{2-m}^1$  quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} > 0$  (resp.  $\omega_{2-m}^2$  quand  $\tilde{\rho}_{r,2-m} < 0$ ), nous avons,

$$\Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega_{2-m}^1) \approx \Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^1) \quad (\text{resp. } \Re \hat{Y}_{ap_{N_2}}^1(\omega_{2-m}^2) \approx \Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^2)) \quad (4.54)$$

Nous exprimons donc l'admittance  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$  en fonction du coefficient de perte  $\hat{Q}_{2-m}$  ainsi :

$$\Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^1) \approx Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{2\hat{Q}_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\hat{Q}_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}}, \quad \text{si } \tilde{\rho}_{r,2-m} > 0 \quad (4.55)$$

$$\Re \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega_{2-m}^2) \approx Y_{\infty_{2-m}} \frac{e^{2\hat{Q}_{2-m}} - \tilde{\rho}_{r,2-m}}{e^{2\hat{Q}_{2-m}} + \tilde{\rho}_{r,2-m}}, \quad \text{si } \tilde{\rho}_{r,2-m} < 0 \quad (4.56)$$

d'où les expressions approchées des coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  qui sont données par (4.50) et (4.51).  $\square$

#### 4.4.3 Critère d'arrêt de la méthode itérative

Le critère d'arrêt de la méthode itérative permet de sortir du processus itératif et d'estimer le nombre total de branches du réseau.

Lors de la  $i^{\text{ème}}$  itération, nous calculons la norme de l'admittance  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}\|_{L_2(\mathbb{C})}$  qui devrait décroître à chaque itération. Le processus itérative s'arrêtera dès que  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}\|_{L_2(\mathbb{C})} - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i\|_{L_2(\mathbb{C})} > 0$ .

**Récapitulatif des étapes de la méthode d'identification :** Comme illustrés dans le schéma de la Figure 4.6, les étapes de la méthode itérative se résument comme suit :

1. Calcul de l'admittance  $Y_{ap_{N_2}}$  au noeud central.
2. Troncature de la plage de pulsation et la détermination de l'intervalle  $[\omega_{inf}^+, \omega_{sup}^+]$  ou l'intervalle  $[\omega_{inf}^-, \omega_{sup}^-]$ .
3. Localisation du pic d'amplitude maximale, c'est-à-dire,  $\omega_{2-m}^1$  ou  $\omega_{2-m}^2$ .
4. Estimation de la plus petite longueur des branches restantes en distance électrique  $\hat{l}_{2-m}$ .
5. Estimation de l'admittance de la fonction  $\hat{Y}_{ap_{2-m}}$ .

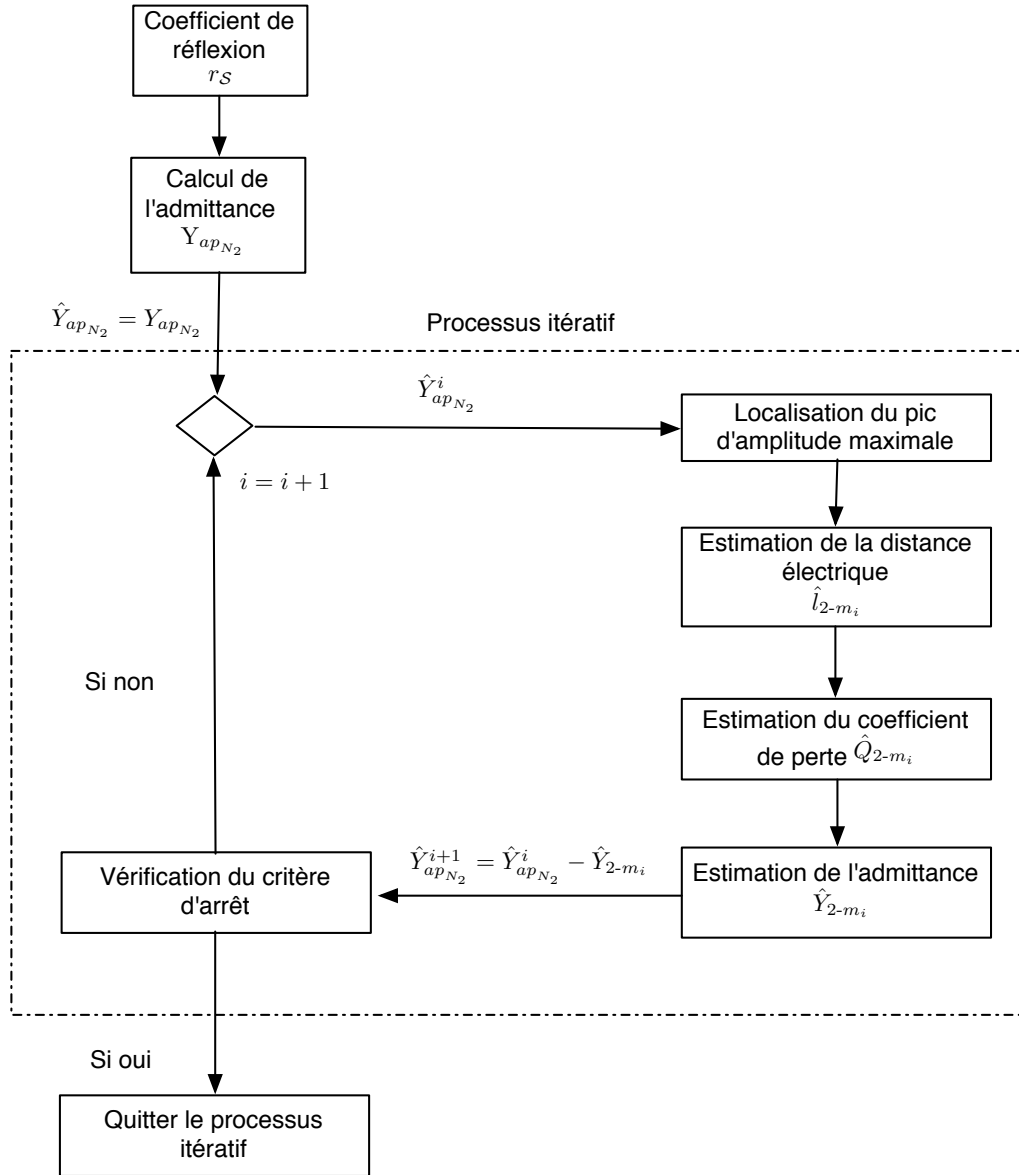


FIGURE 4.6 – Description du processus itératif.

6. Estimation du coefficient de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$ .
7. Mettre à jour la fonction  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i$  telle que :  $\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}(\omega) = \hat{Y}_{ap_{N_2}}^i(\omega) - \hat{Y}_{ap_{2-m}}(\omega)$ .
8. Vérification du critère d'arrêt :
  - Si  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}\|_2 - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i\|_2 < 0$ , nous continuons le processus itératif en retournant à l'étape 3.
  - Si  $\|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^{i+1}\|_2 - \|\hat{Y}_{ap_{N_2}}^i\|_2 > 0$ , le processus itératif s'arrêtera et nous retiendrons le nombre total des branches, les longueurs en distances électriques et les coefficients de pertes estimés.



## 4.5 Exemples de simulations numériques

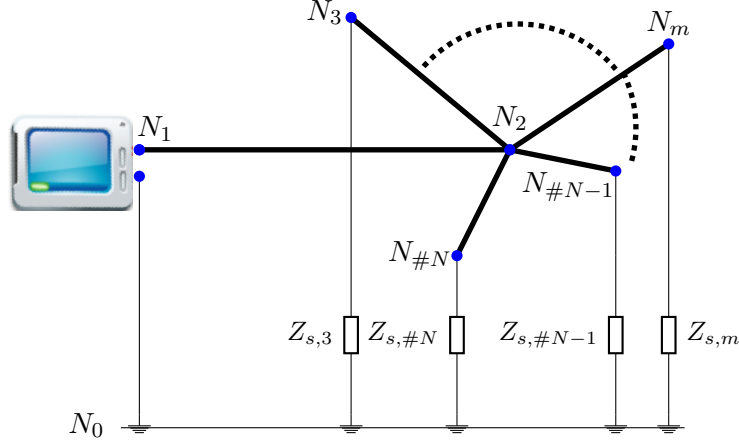


FIGURE 4.7 – Exemple d'un réseau électrique en étoile mono-filaire.

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de simulations numériques obtenus pour un réseau électrique en étoile  $\mathcal{S}$  formé d'une dizaine de câbles coaxiaux d'impédances caractéristiques en haute fréquence  $\zeta_\infty := \sqrt{L_{m-n}/C_{m-n}} = 50 \, \Omega$  et d'une vitesse de propagation  $c_0 := 1/\sqrt{L_{m-n}C_{m-n}} = 2.478 \times 10^8 \, \text{m/s}$ . Les inductances et les capacités des branches sont déduites ainsi :

$$\begin{aligned} L_{m-n}(x) &= 0.2018 \, \mu\text{H}/\text{m}, \quad C_{m-n}(x) = 0.0807 \, \text{nF}/\text{m} \\ R_{m-n}(x) &= 0 \, \Omega/\text{m}, \quad G_{m-n}(x) = 0 \, \text{S}/\text{m} \end{aligned}$$

Nous supposons que les branches du réseau contiennent des pertes telles que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathcal{E}^\circ \setminus \{1\} \quad R_{2-m} &= 2.22 \times 10^{-1} \, \Omega/\text{m}, \quad G_{2-m} = 10^{-7} \, \text{S}/\text{m} \\ R_{1-2} &= 0 \, \Omega/\text{m}, \quad G_{1-2} = 0 \, \text{S}/\text{m} \end{aligned}$$

Nous allons étudier le problème inverse sur deux exemples :

- Exemple 1 : Les longueurs des branches sont choisies de façon équidistantes.
- Exemple 2 : Les longueurs des branches sont choisies aléatoirement.

**Remarque 27.** Nous rappelons que les longueurs géométriques  $\ell_{2-m}$  et les longueurs en distances électriques  $l_{2-m}$  sont reliées ainsi :

$$\ell_{2-m} = c_0 l_{2-m}$$

### 4.5.1 Problème inverse sur un réseau électrique uniforme

Nous simulons numériquement un réseau  $\mathcal{S}$  composé de 26 branches uniformes parmi lesquelles la branche de test  $B_{1-2}$  est sans perte. Les extrémités des branches

connectées aux noeuds  $N_m$ , pour  $m \in \{3, \dots, 27\}$ , sont en circuit ouvert ( $\tilde{\rho}_{r,2-m} = 1$ ). Avant d'étudier le problème inverse, nous générons le coefficient de réflexion  $r_S$  du réseau  $S$  par le simulateur présenté au chapitre précédent. Pour résoudre le problème inverse, nous commençons par le calcul de l'admittance apparente  $Y_{ap_{N_2}}$  au noeud central en fonction de  $r_S$  via la relation (4.41).

#### 4.5.1.1 Exemple 1 : Les longueurs des branches sont choisies de manière équidistantes

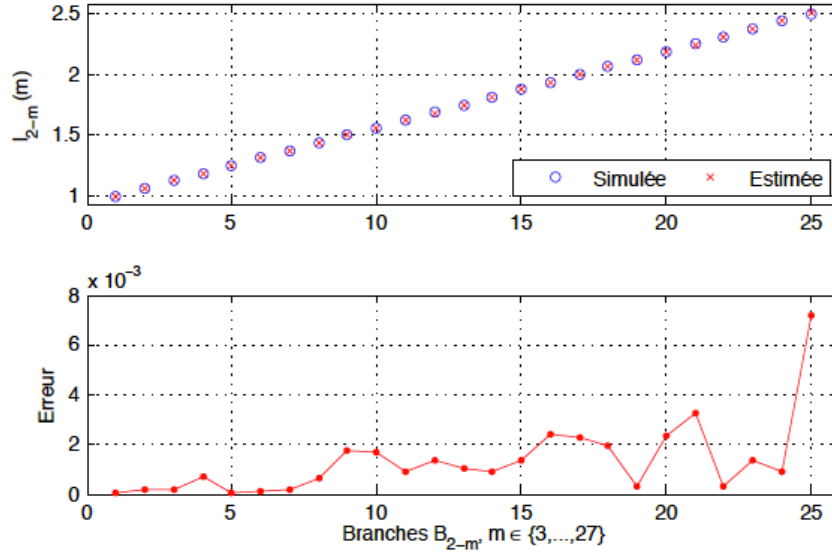


FIGURE 4.8 – Exemple 1 : Longueurs  $\hat{\ell}_{2-m}$  estimées des branches  $B_{2-m}$  comparées aux longueurs simulées.

Dans ce premier exemple des simulations numériques, les longueurs des branches  $\ell_{2-m}$ , pour  $m \in \{3, \dots, 27\}$ , sont uniformément distribuées dans l'intervalle  $[\ell_{2-3}, \ell_{2-27}]$  avec  $\ell_{2-3} = 1$  m et  $\ell_{2-27} = 2.5$  m et  $\forall m \in \{3, \dots, 27\}, \ell_{2-m} = \ell_{2-3} + 0.0625(m - 3)$ .

La Figure 4.8 représente une comparaison des longueurs des branches simulées et estimées. Nous constatons que l'erreur d'estimation des longueurs est d'ordre 1 mm. Dans le processus itératif, nous avons utilisé l'approximation (4.49) des coefficients de pertes. La Figure 4.9 représente une comparaison des coefficients de pertes.

En utilisant l'approximation (4.50) des coefficients de pertes dans le processus itératif, nous obtenons également des estimations des longueurs des branches. La comparaison des coefficients de pertes estimés et réels est présentée dans la Figure 4.10.

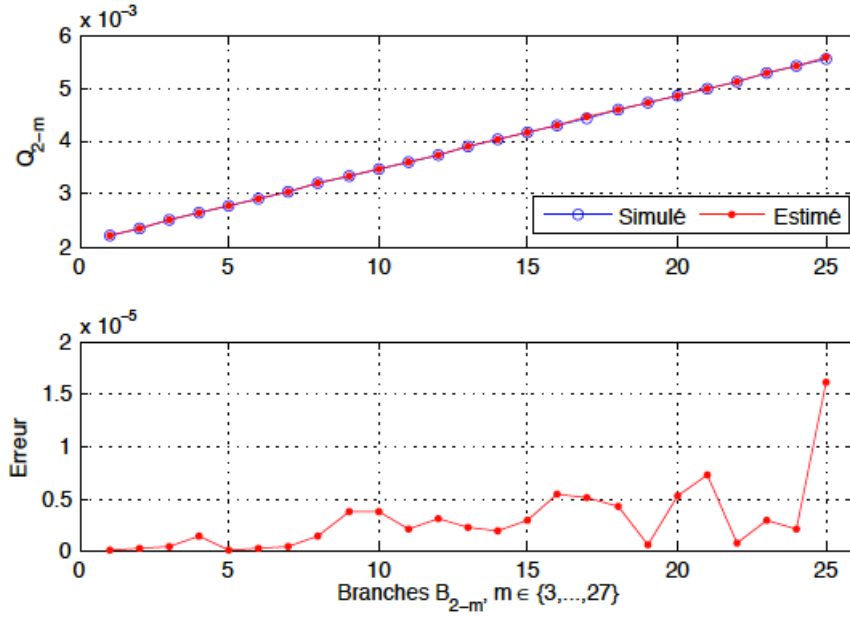


FIGURE 4.9 – Exemple 1 : Coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  calculés par la relation (4.49) comparés aux coefficients de pertes simulés.

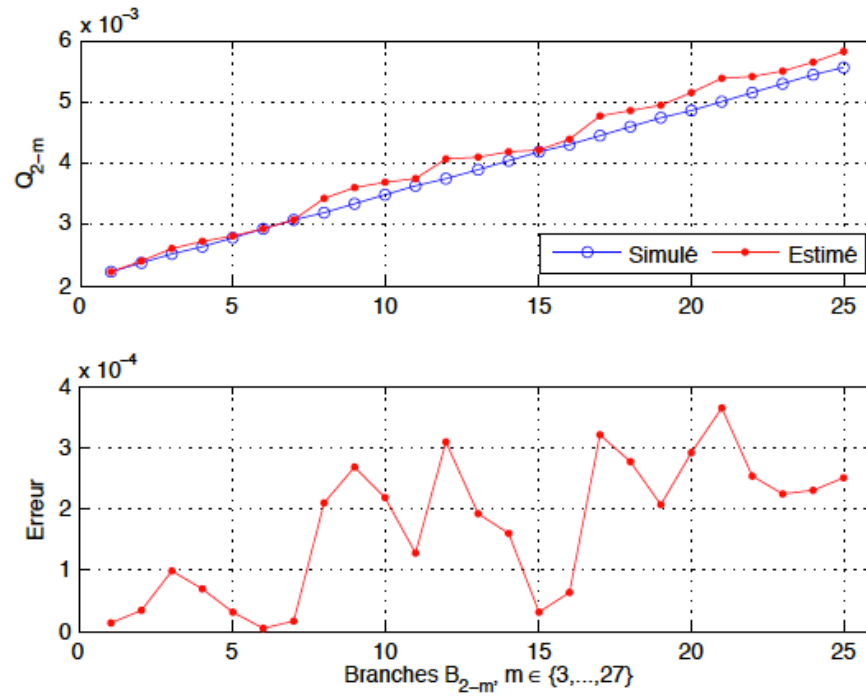


FIGURE 4.10 – Exemple 1 : Coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  calculés par la relation (4.50) comparés aux coefficients de pertes simulés.

#### 4.5.1.2 Exemple 2 : Les longueurs des branches sont choisies aléatoirement

Maintenant, nous testons le cas où les longueurs  $\ell_{2-m}$ , pour  $m \in \{3, \dots, 27\}$ , sont distribuées aléatoirement entre 1 m et 2.5 m.

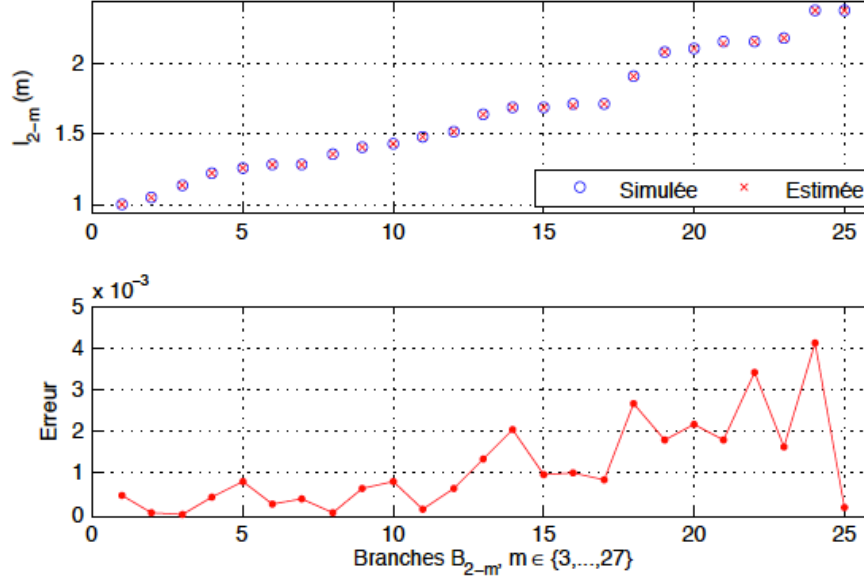


FIGURE 4.11 – Exemple 2 : Longueurs  $\hat{l}_{2-m}$  estimées des branches  $B_{2-m}$  comparées aux longueurs simulées.

La Figure 4.11 représente la comparaison des longueurs réelles et estimées en utilisant l'approximation (4.49) des coefficients de pertes. Nous avons également une estimation des longueurs avec une erreur d'ordre de 1 mm malgré que les longueurs des branches sont très proches ( $B_{2-14}$ ,  $B_{2-15}$ ,  $B_{2-16}$  et  $B_{2-17}$ ). La comparaison des coefficients de pertes réels et estimés est présentée dans la Figure 4.12. Nous avons également une bonne estimation des coefficients de pertes.

Dans le cas de l'utilisation de l'approche (4.50), les coefficients de pertes, réels et estimés, sont présentés dans la Figure 4.13. Nous remarquons que les deux courbes ne sont pas confondues mais l'erreur d'estimation est toujours d'ordre  $10^{-3}$ .

#### 4.5.2 Problème inverse sur un réseau électrique non uniforme

Des résultats théoriques sur l'identifiabilité des longueurs, en distances électriques, et des coefficients de pertes des branches non uniformes d'un réseau en étoile sont présentés dans [101]. En effet, sous l'hypothèse suivante,

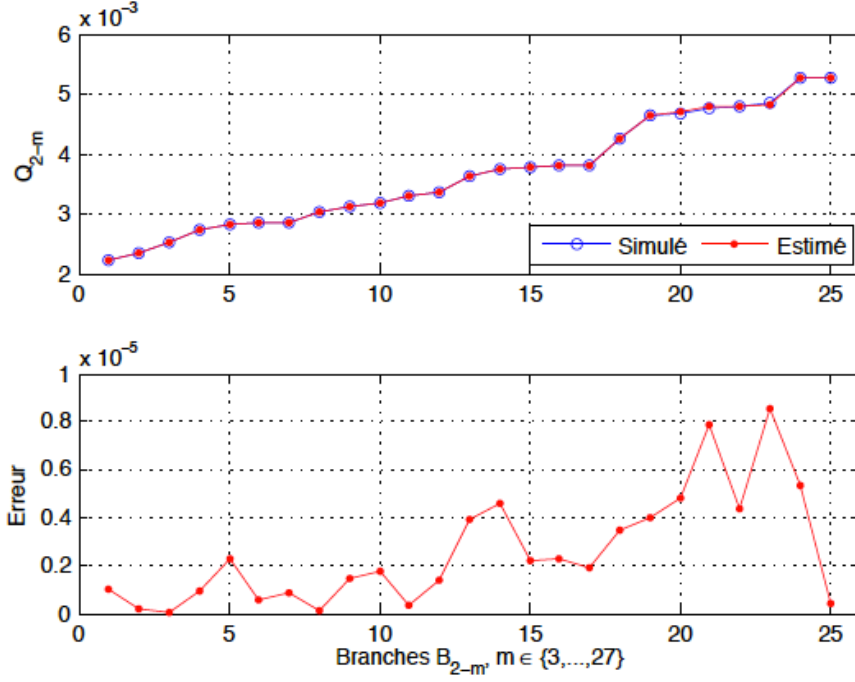


FIGURE 4.12 – Exemple 2 : Coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  calculés par la relation (4.49) comparés aux coefficients de pertes simulés.

#### H 21.

- Les inductances  $L_{2-m}$  et les capacités  $C_{2-m}$  des branches  $B_{2-m}$  sont constantes.
- Les paramètres de pertes  $R_{2-m}$  et  $G_{2-m}$  vérifient la relation suivante :

$$\frac{R_{2-m}(x)}{L_{2-m}} = \frac{G_{2-m}(x)}{C_{2-m}}, \quad x \in [0, l_{2-m}] \quad (4.57)$$

où  $l_{2-m}$  représente la longueur, en distance électrique, de la branche  $B_{2-m}$  du réseau.

- Les extrémités des branches sont en circuit ouvert.

les longueurs en distances électriques et les coefficients de pertes pouvant être estimés via l'admittance normalisée  $f(k)$  définie ainsi :

$$f(k) = \frac{r(k) - 1}{r(k) + 1} = \sum_{m=3}^{\#N} \tanh(Q_{2-m} - jkl_{2-m}) \quad (4.58)$$

où la fonction  $r(k)$  représente le coefficient de réflexion au noeud central en fonction du nombre d'onde  $k = -\omega$ . Les coefficients de pertes  $Q_{2-m}$  des branches sont définis par la relation suivante :

$$Q_{2-m} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{2-m}} \left( \frac{R_{2-m}(x)}{L_{2-m}} + \frac{G_{2-m}(x)}{C_{2-m}} \right) dx \quad (4.59)$$

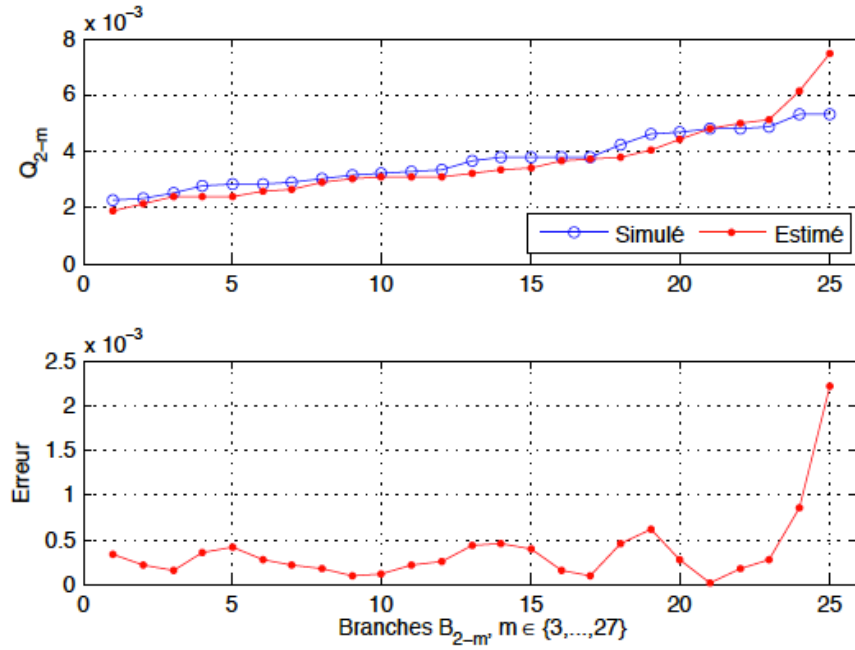


FIGURE 4.13 – Exemple 2 : Coefficients de pertes  $\hat{Q}_{2-m}$  calculés par la relation (4.50) comparés aux coefficients de pertes simulés.

Malgré l'hétérogénéité des branches du réseau électrique en étoile, sous l'hypothèse **H21**, la même méthode itérative, développée pour des réseaux uniformes, s'applique pour la relation afin d'estimer les longueurs et les coefficients de pertes des branches.

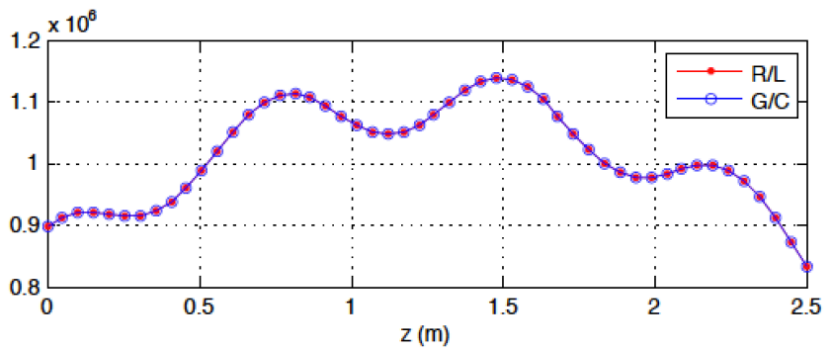


FIGURE 4.14 – Profils des fonctions  $\frac{R_{2-m}(z)}{L_{2-m}}$  et  $\frac{G_{2-m}(z)}{C_{2-m}}$

Dans cette exemple de simulation numériques, nous considérons un réseau électrique en étoile formé de 30 branches non uniformes. Les inductances  $L_{2-m}$  et les capacités  $C_{2-m}$  sont données dans la section 4.5.1. Les profils des fonctions  $\frac{R_{2-m}}{L_{2-m}}$

et  $\frac{G_{2-m}}{C_{2-m}}$  sont présentés dans la Figure 4.14 en fonction de la coordonnée de l'espace  $z$ . Nous supposons que les longueurs  $\ell_{2-m} = 1/(L_{2-m}C_{2-m})$ , sont distribuées aléatoirement dans l'intervalle  $[\ell_1, \ell_{29}]$  avec  $\ell_1 = 1$  et  $\ell_{29} = 2.5$  m.

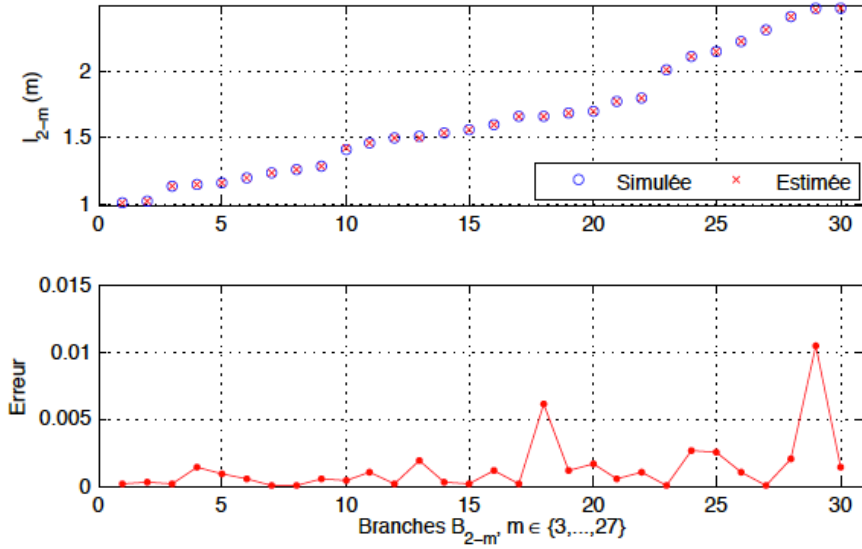


FIGURE 4.15 – Longueurs  $\hat{l}_{2-m}$  estimées des branches  $B_{2-m}$  comparées aux longueurs simulées.

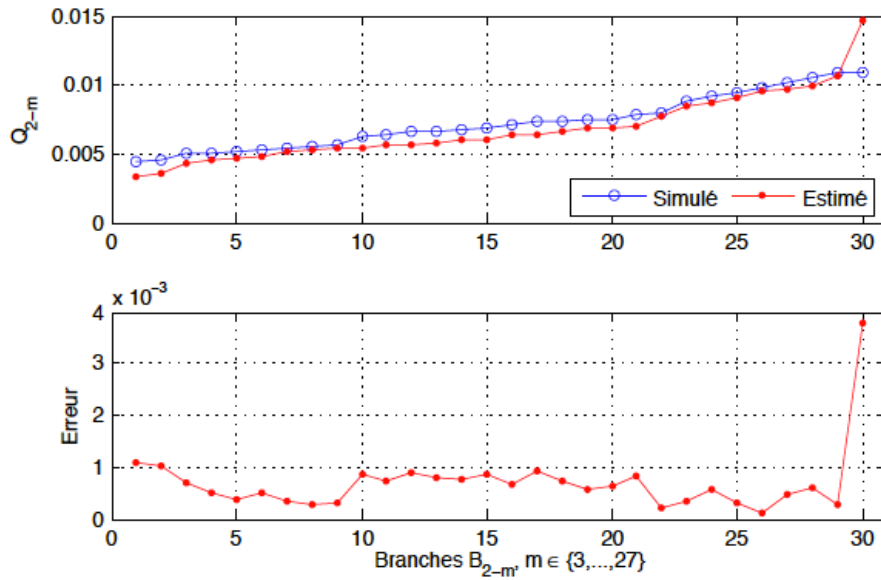


FIGURE 4.16 – Coefficients de pertes estimés des branches  $B_{2-m}$  comparés aux coefficients simulés.

Les Figures 4.15 et 4.16 représentent respectivement la comparaison des longueurs et des coefficients de pertes réels et estimés. Comme dans le cas des branches uniformes, nous avons une bonne estimation des longueurs et des coefficients de pertes des branches.

## 4.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons développé une méthodologie de diagnostic qui permet d'identifier le nombre de branches, les longueurs et les coefficients de pertes des branches d'un réseau électrique en étoile. Cette méthode d'identification est basée sur un processus itératif appliqué à l'admittance au noeud central du réseau. L'identification des longueurs des branches de réseau permet de détecter et localiser les défauts francs s'ils existent. Par ailleurs, l'identification des coefficients des pertes permet de détecter les changements des paramètres de pertes  $R_{2-m}$  et  $G_{2-m}$ .





# Equation de *BLT* pour des réseaux électriques non uniformes

Dans le présent chapitre, nous modélisons des réseaux de lignes de transmissions non uniformes et mono-filaires, par l'équation de BLT [13]. Nous présentons une méthode entièrement automatisée pour le calcul des matrices de scattering<sup>1</sup> des branches de réseau et des matrices de diffusion<sup>2</sup> aux noeuds. Afin d'éviter de vérifier la cohérence entre les choix locaux de l'orientation du courant dans un réseau, nous effectuons les calculs avec une certaine convention locale pour obtenir les équations des branches et des noeuds. La méthode de calcul des matrices de scattering présentée dans ce chapitre est basée sur la résolution des équations différentielles des branches et le calcul des coefficients de diffusion aux noeuds est déduit par l'analyse des conditions aux noeuds. Dans le cas particulier d'un noeud intermédiaire idéal (un noeud auquel nous ne connectons pas d'impédance de charge ni de source), la méthode de calcul des coefficients de diffusion est inspirée par les résultats rapportés dans [69, 71].

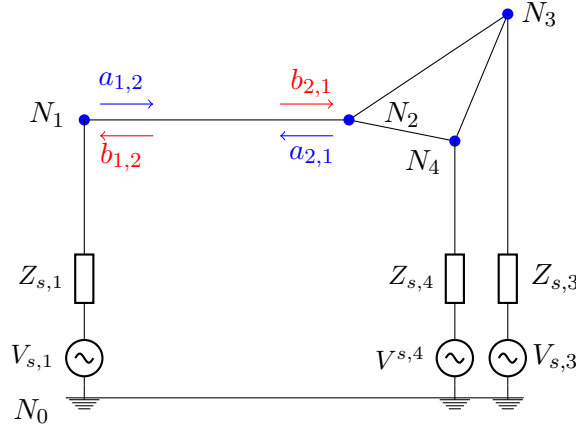


FIGURE 5.1 – Exemple d'un réseau électrique contenant une maille

Nous considérons un réseau  $\mathcal{G}$  composé de lignes de transmission non uniformes

1. Cette matrice est nommée *matrice de propagation* dans [13] mais, plus souvent, elle est connue sous le nom de "scattering matrix".
2. Dans [13], cette matrice est nommée *scattering matrix* définie sur un noeud.

avec pertes. L'hétérogénéité des lignes de transmission n'est pas considérée dans [13] qui ne concerne que les lignes uniformes. Comme dans la littérature de l'équation de BLT, nous supposons que chaque branche  $B_{m-n}$  du réseau est éclairée par une onde électromagnétique qui est traduite par des sources de tension  $V_{m,n}^s$  et de courant  $I_{m,n}^s$  distribuées le long de la branche. Dans le domaine fréquentiel, nous décrivons la propagation du courant  $I_{m,n}$  et de la tension  $V_{m,n}$  dans la branche  $B_{m-n}$  par les équations des télégraphiste (2.1). À chaque noeud  $N_m$  du réseau non idéal, nous connectons une source de tension alternative  $V_{s,m}$  avec une impédance  $Z_{s,m}$  comme ils sont illustrés au noeud  $N_2$  de la Figure 5.1. Un tel noeud est modélisé par le modèle équivalent de Thévenin suivant :

$$V_{m,0}(\omega) - Z_{s,m}(\omega)I_{m,0}(\omega) = V_{s,m}(\omega) \quad (5.1)$$

où  $V_{m,0}$  et  $I_{m,0}$  représentent respectivement la tension au noeud  $N_m$  et le courant traversant la charge  $Z_{s,m}$  vers le noeud  $N_m$ . Nous rappelons que l'indice 0 désigne le noeud particulier qui est la référence de potentiel.

Aux noeuds intermédiaires idéaux, nous avons les conditions aux noeuds (1.41) et (1.42) qui décrivent la relation entre le courant et la tension aux noeuds. Nous allons utiliser ces conditions pour formuler l'équation de BLT vérifiée par les ondes de puissance sortantes des noeuds.

## 5.1 Equations caractéristiques des branches et des noeuds

Considérons une branche  $B_{m-n}$  d'un réseau  $\mathcal{G}$ . Nous lui associons les deux ondes de puissance  $\nu_{m,n}$  et  $\nu_{n,m}$  qui se propagent dans les deux sens opposés et elles sont définies par (1.43). Nous définissons également deux ondes de sources combinées le long de la branche  $B_{m-n}$  par :

$$\nu_{n,m}^s(\omega, z) := \zeta_{\infty_{m-n}}^{-\frac{1}{2}}(\omega, z)V_{n,m}^s(\omega, z) + \zeta_{\infty_{m-n}}^{\frac{1}{2}}(\omega, z)I_{n,m}^s(\omega, z) \quad (5.2)$$

$$\nu_{m,n}^s(\omega, z) := \zeta_{\infty_{m-n}}^{-\frac{1}{2}}(\omega, z)V_{m,n}^s(\omega, z) + \zeta_{\infty_{m-n}}^{\frac{1}{2}}(\omega, z)I_{m,n}^s(\omega, z) \quad (5.3)$$

Les ondes de puissance  $\nu_{m,n}$  et  $\nu_{n,m}$  sont solutions des équations de Zakharov-Shabat (1.45) avec un terme supplémentaire au second membre .

### 5.1.1 Equations de scattering définies sur les branches

Dans le chapitre préliminaire consacré à l'étude de la ligne de transmission simple, nous avons introduit des matrices caractéristiques d'une ligne. Dans la présente section, nous associons à chaque branche  $B_{m-n}$  des matrices caractéristiques similaires indexées par  $m-n$ . Conformément aux notations des ondes aux extrémités d'un quadripôle et dans l'intention de simplifier nos notations, nous notons les ondes entrantes et sortantes de chaque extrémité d'une branche  $B_{m-n}$  par :

$$a_{m,n}(\omega) := \nu_{m,n}(\omega, x_m) , \quad a_{n,m}(\omega) := \nu_{n,m}(\omega, x_n) \quad (5.4)$$

$$b_{m,n}(\omega) := \nu_{n,m}(\omega, x_m) , \quad b_{n,m}(\omega) := \nu_{m,n}(\omega, x_n) \quad (5.5)$$

où  $x_m$  et  $x_n$  représentent respectivement les positions des extrémités de la branche  $B_{m-n}$  connecté aux noeuds  $N_m$  et  $N_n$ . Ces nouvelles notations ont pour avantage de ne pas faire apparaître les coordonnées spatiales dans les branches dont il serait nécessaire de spécifier les orientations. Avec ces notations, la lettre "a" désigne une onde entrante dans une branche, et "b" une onde sortante. Le premier élément d'un double indice indique l'extrémité de la branche par qui l'onde sort ou entre et où la valeur de l'onde est évaluée. Ces conventions donnent :

- $a_{m,n}(\omega)$  : onde entrante dans la branche  $B_{m-n}$  par le noeud  $N_m$  et évaluée à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$ .
- $b_{m,n}(\omega)$  : onde sortante de la branche  $B_{m-n}$  par le noeud  $N_m$  et évaluée à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$ .

Ainsi nous n'avons plus besoin d'indiquer la coordonnée  $x_m$  ou  $x_n$ , et surtout ceci permet d'éviter de préciser le choix du système de coordonnée suivant l'orientation du courant, du moment où nous nous intéressons seulement aux valeurs des ondes aux extrémités des branches. Nous notons également la matrice diagonale contenant les impédances caractéristiques, en haute fréquence,  $\zeta_{\infty m:n}$  aux extrémités de la branche par :

$$\zeta_{\infty m:n}(\omega) = \begin{bmatrix} \zeta_{\infty m:n}(x_m) & 0 \\ 0 & \zeta_{\infty m:n}(x_n) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

**Remarque 28.**

- Dans certains paramètres des branches, nous utilisons les coordonnées  $x_m$  et  $x_n$  pour indiquer l'extrémité de la branche qui est connectée aux noeuds  $N_m$  et  $N_n$ .
- Le double indice  $(m:n)$  est utilisé pour marquer que l'objet correspond à la branche  $B_{m-n}$  du réseau et l'inversion des deux indices indique essentiellement le même objet, à une certaine permutation près, comme dans (5.6).

En termes des courants et des tensions aux extrémités de la branche, nous exprimons les ondes entrantes dans la branche par :

$$\begin{bmatrix} a_{m,n}(\omega) \\ a_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} = \zeta_{\infty m:n}(\omega)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} V_{m,n}(\omega) \\ V_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} + \zeta_{\infty m:n}(\omega)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} I_{m,n}(\omega) \\ I_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Les ondes sortantes sont exprimées également par :

$$\begin{bmatrix} b_{m,n}(\omega) \\ b_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} = \zeta_{m:n}(\omega)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} V_{m,n}(\omega) \\ V_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} - \zeta_{m:n}(\omega)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} I_{m,n}(\omega) \\ I_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Nous rappelons que  $I_{m,n}$  et  $V_{m,n}$  représentent respectivement le courant entrant dans la branche  $B_{m-n}$  par le noeud  $N_m$  et évalué à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$  et la tension à l'extrémité  $N_m$  de la branche  $B_{m-n}$ .

De la même manière que pour une seule ligne de transmission, avec ces nouvelles

notations, nous associons à chaque branche  $B_{m-n}$  une matrice de scattering  $S_{m-n}$  qui traduit le comportement des ondes entrantes et sortantes de ses extrémités et un vecteur des sources combinées ramenées aux noeuds  $\iota_{m:n}$ , introduite dans (2.37), telle que :

$$\begin{bmatrix} b_{m,n}(\omega) \\ b_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{n:m,m}(\omega) & S_{n:m,n}(\omega) \\ S_{m:n,m}(\omega) & S_{m:n,n}(\omega) \end{bmatrix}}_{S_{m-n}(\omega)} \begin{bmatrix} a_{m,n}(\omega) \\ a_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \iota_{m;n}(\omega) \\ \iota_{n;m}(\omega) \end{bmatrix}}_{\iota_{m:n}(\omega)} \quad (5.9)$$

**Remarque 29.**

- La convention de notation à triple indices des éléments de la matrice de scattering  $S_{m-n}$  sera utilisée également pour d'autres matrices caractéristiques des branches  $B_{m-n}$  du réseau (matrices d'impédance et d'admittance). Le premier et le deuxième indices, séparés par (:), indiquent les deux extrémités de la branche. Le deuxième et le troisième indices, séparés par (,) indiquent la position de l'évaluation de l'onde entrante de l'onde sortante.
- Dans cette généralisation de l'équation de *BLT*, nous n'avons pas utilisé la terminologie matrice de propagation utilisée dans [13] parce que dans d'autre littérature de ligne de transmission, sa définition correspond à la matrice de scattering.

Les éléments de la matrice de scattering  $S_{m-n}$  peuvent être exprimés en fonctions des composantes de la matrice de transition d'état de la branche  $B_{m-n}$ . Pour la raison de la complexité des notations, ici nous ne réécrivons pas la matrice de transition d'état introduite pour la ligne de transmission simple et sa relation avec la matrice de scattering (cf. section 2.3.2).

**Matrice d'admittance - Matrice d'impédance :** Aux deux extrémités d'une branche  $B_{m-n}$ , les courants et les tensions sont reliés également par la matrice d'admittance  $Y_{m-n}$  ou la matrice d'impédance  $Z_{m-n}$  via les équations suivantes (voir la Remarque 29 concernant les triples indices des matrices  $Y_{m-n}$  et  $Z_{m-n}$ ) :

$$\begin{bmatrix} I_{m,n}(\omega) \\ I_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{n:m,m}(\omega) & y_{n:m,n}(\omega) \\ y_{m:n,m}(\omega) & y_{m:n,n}(\omega) \end{bmatrix}}_{Y_{m-n}(\omega)} \begin{bmatrix} V_{m,n}(\omega) \\ V_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m;n}^s(\omega) \\ I_{n;m}^s(\omega) \end{bmatrix}}_{I_{m:n}^s(\omega)} \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} V_{m,n}(\omega) \\ V_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{n:m,m}(\omega) & z_{n:m,n}(\omega) \\ z_{m:n,m}(\omega) & z_{m:n,n}(\omega) \end{bmatrix}}_{Z_{m-n}(\omega)} \begin{bmatrix} I_{m,n}(\omega) \\ I_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} V_{m;n}^s(\omega) \\ V_{n;m}^s(\omega) \end{bmatrix}}_{V_{m:n}^s(\omega)} \quad (5.11)$$

où  $I_{m:n}^s$  et  $V_{m:n}^s$  représentent respectivement les vecteurs des sources de courants et de tensions distribuées ramenées aux extrémités de la branche. Ces vecteurs sont

introduits dans (2.41) et (2.42) pour une ligne de transmission. Elles sont exprimés en terme de la matrice de scattering  $S_{m:n}$  et le vecteur des ondes  $\iota_{m:n}$  comme suit :

$$Y_{m:n} = \left( \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} + S_{m:n} \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} - S_{m:n} \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (5.12)$$

$$Z_{m:n} = \left( \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} - S_{m:n} \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} + S_{m:n} \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5.13)$$

$$I_{m:n}^s = - \left( \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} + S_{m:n} \zeta_{m:n}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \iota_{m:n} \quad (5.14)$$

$$V_{m:n}^s = \left( \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} - S_{m:n} \zeta_{m:n}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \iota_{m:n} \quad (5.15)$$

Ces expressions sont déjà introduites, pour une ligne de transmission simple, dans la section (2.2.2.2). Dans les prochaines sections, nous nous intéresserons uniquement à la matrice de scattering  $S_{m:n}$  et au vecteur des ondes des sources  $\iota_{m:n}$ . En effet, nous allons présenter une méthode numérique, basée sur la résolution des équations différentielles, pour calculer leurs composantes à partir des caractéristiques des branches.

### 5.1.2 Equations de diffusion définies sur les noeuds

Dans la littérature de l'équation de BLT, il est défini au niveau de chaque noeud  $N_m$  une matrice de coefficients, dite "scattering matrix", décrivant la relation affine entre les ondes entrantes et sortantes de ce noeud. Dans cette thèse, pour éviter la confusion avec la matrice de scattering associée à une branche de réseau, nous remplaçons le terme "scattering matrix", défini en un noeud  $N_m$ , par une matrice de diffusion<sup>3</sup>, noté  $D_m$ . En absence de source locale au noeud  $N_m$ , les ondes entrantes et sortantes sont liées linéairement par  $D_m$ . Comme nous allons le voir plus loin, la présence d'une source locale au noeud  $N_m$  conduit à introduire un terme  $\pi_m$ <sup>4</sup>, dont la dimension physique est homogène aux ondes  $a_{m,n}$  et  $b_{m,n}$ , rendant la relation entre les ondes affine.

**Définition 13.** *Considérons un noeud  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$ . La matrice de diffusion  $D_m$  relie les ondes entrantes et les ondes sortantes du noeud, et éventuellement la source locale connectée au noeud, par*

$$a_m(\omega) = D_m(\omega)b_m(\omega) + \pi_m(\omega) \quad (5.16)$$

où

- $a_m := [a_{m,n}]_{n \in C_m}$  le vecteur constitué des ondes sortantes du noeud  $N_m$ .
- $b_m := [b_{m,n}]_{n \in C_m}$  le vecteur constitué des ondes entrantes dans le noeud  $N_m$ .
- $\pi_m$  un vecteur qui sera défini en fonction de la source localisée au noeud  $N_m$ .

Dans la méthode automatique du calcul de la matrice  $D_m$  et du terme  $\pi_m$  aux noeuds terminaux et intermédiaires, nous utilisons les conditions aux noeuds (5.1)

3. La matrice de diffusion est la traduction en français de *scattering coefficient*

4. Dans le cas d'une ligne de transmission simple, le terme  $\pi$  est exprimé en fonction de la tension de la source à l'extrémité de la ligne

ou (1.41- 1.42). En ce qui concerne les types de coefficients  $D_m$  et des paramètres  $\pi_m$ , nous avons deux cas : cas scalaire et cas matriciel (vectorielle pour  $\pi_m$ ). En effet, à chaque noeud terminal  $N_m$ , l'extrémité d'une seule branche  $B_{m-n}$ , le coefficient de diffusion  $D_m$  et le paramètre  $\pi_m$  sont des scalaires reliant les ondes  $b_{m,n}$  et  $a_{m,n}$ . Nous notons donc,

$$D_m := d_{m,n:n}, \quad \pi_m := \pi_{m:n} \quad (5.17)$$

Au niveau des noeuds intermédiaires, la matrice de diffusion  $D_m$  est une matrice carrée et  $\pi_m$  est un vecteur dont sa taille est égale au nombre des branches connectées au noeud  $N_m$ . En supposant que  $a_{m,n_i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $a_m$  et que  $b_{m,n_j}$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $b_m$ , nous notons les éléments  $(D_m)_{i,j}$  de la matrice  $D_m$  et du vecteur  $\pi_m$  par :

$$(D_m)_{i,j} := d_{m,n_i:n_j}, \quad (\pi_m)_i := \pi_{m:n_i} \quad (5.18)$$

**Remarque 30.** Pour la notation d'un coefficient de diffusion  $D_m$ , le premier et le deuxième indice d'un élément  $d_{m,k:l}$ , séparés par  $(,)$ , indiquent les deux extrémités de la branche contenant l'onde sortante du noeud  $N_m$ . Le deuxième et le troisième, séparés par  $(:)$  indiquent respectivement le noeud d'arrivée de l'onde sortante  $a_{m,k}$  et le départ de l'onde entrante  $b_{m,l}$ .

**Exemple d'application :** Considérons le réseau de la Figure 5.1. Au noeud  $N_1$ , le coefficient de diffusion  $D_1$  et le terme  $\pi_1$  sont des scalaires et ils vérifient la relation affine suivante :

$$\underbrace{a_{1,2}}_{a_1}(\omega) = \underbrace{d_{1,1:1}}_{D_1}(\omega) \underbrace{b_{1,2}}_{b_1}(\omega) + \underbrace{\pi_{1:1}}_{\pi_1}(\omega) \quad (5.19)$$

Au noeud  $N_2$ , la relation affine, vérifiée par la matrice  $D_2$  et le terme  $\pi_2$ , est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,3} \\ a_{2,4} \end{bmatrix}}_{a_2}(\omega) = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{2,1:1} & d_{2,1:3} & d_{2,1:4} \\ d_{2,3:1} & d_{2,3:3} & d_{2,3:4} \\ d_{2,4:1} & d_{2,4:3} & d_{2,4:4} \end{bmatrix}}_{D_2}(\omega) \underbrace{\begin{bmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,3} \\ b_{2,4} \end{bmatrix}}_{b_2}(\omega) + \underbrace{\begin{bmatrix} \pi_{2:1} \\ \pi_{2:3} \\ \pi_{2:4} \end{bmatrix}}_{\pi_2}(\omega) \quad (5.20)$$

Nous constatons qu'à un noeud terminal, nous pouvons se contenter d'un double indice pour le coefficient de diffusion. Cependant, à un noeud intermédiaire  $N_m$ , nous avons besoin d'un triple indice pour spécifier les branches contenant les ondes de puissance.

Après avoir défini les équations de scattering définies sur chaque branche  $B_{m-n}$  et les équations de diffusion définies sur chaque noeud  $N_m$  du réseau, nous concaténons ces équations pour l'ensemble des branches et des noeuds pour obtenir les équations des branches et les équations des noeuds.

## 5.2 Equations caractéristiques du réseau

Dans l'intention de construire un modèle complet du réseau électrique  $\mathcal{G}$ , nous regroupons, pour chacune des  $\#B(\mathcal{G})$  branches génériquement désignée par  $B_{m-n}$ , l'ensemble des vecteurs des ondes entrantes  $[a_{m,n} \ a_{n,m}]^T$  et celui des ondes sortantes  $[b_{m,n} \ b_{n,m}]^T$ , ainsi que les vecteurs des sources combinées ramenées aux noeuds  $\iota_{m:n}$  en super-vecteurs des ondes  $a_{\mathcal{B}}$ ,  $b_{\mathcal{B}}$  et celui des sources  $\iota_{\mathcal{B}}$  telles que :

$$a_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{m,n} \\ a_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad b_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{m,n} \\ b_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \iota_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \iota_{m;n} \\ \iota_{n;m} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

### 5.2.1 Concaténation des équations de scattering

Les équations de scattering décrivent la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes des deux extrémités des branches de réseau. Pour généraliser l'équation (5.9) à l'ensemble des branches de réseau, nous définissons la super-matrice de scattering  $S_{\mathcal{B}}$ , qui est diagonale par blocs, par :

$$S_{\mathcal{B}} = \oplus_{(m-n) \in \mathcal{B}} S_{m-n} \quad (5.22)$$

où  $\oplus_{(m-n) \in \mathcal{B}}$  représente la somme directe sur l'ensemble des branches  $B_{m-n}$  du réseau. Lors de la construction de la super-matrice de scattering, définie par blocs, nous respectons l'ordre des branches suivi pour construire les super-vecteurs des ondes  $a_{\mathcal{B}}$  et  $b_{\mathcal{B}}$ .

**Remarque 31.** Les super-vecteurs et les super-matrices indexés par  $\mathcal{B}$  sont formées par les vecteurs ou les matrices associés à l'ensemble des branches du réseau.

**Définition 14.** Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$  dont chaque branche  $B_{m-n}$  est caractérisée par l'équation de scattering (5.9). L'équation des branches définie sur le réseau  $\mathcal{G}$  est la suivante :

$$b_{\mathcal{B}}(\omega) = S_{\mathcal{B}}(\omega)a_{\mathcal{B}}(\omega) + \iota_{\mathcal{B}}(\omega) \quad (5.23)$$

Cette équation résulte de la concaténation des équations de scattering (5.9).

**Super-matrice d'admittance - Super-matrice d'impédance :** Les équations des branches définies par les super-matrices d'admittance et d'impédance sont similaires aux équations définies par la super-matrice de scattering. Considérons les super-vecteurs des courants et des tensions suivants :

$$I_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{m,n} \\ I_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad V_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ V_{m,n} \\ V_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad I_{\mathcal{B}}^s = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{m;n}^s \\ I_{n;m}^s \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad V_{\mathcal{B}}^s = \begin{bmatrix} \vdots \\ V_{m;n}^s \\ V_{n;m}^s \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.24)$$



La construction des super-vecteurs de courant  $I_{\mathcal{B}}$ ,  $I_{\mathcal{B}}^s$  ou de tension  $V_{\mathcal{B}}$ ,  $V_{\mathcal{B}}^s$  est similaire à celle des super-vecteurs des ondes. En concaténant les équations d'admittances et d'impédance, nous obtenons les équations des branches suivantes :

$$I_{\mathcal{B}}(\omega) = Y_{\mathcal{B}}(\omega)V_{\mathcal{B}}(\omega) + I_{\mathcal{B}}^s(\omega) \quad (5.25)$$

$$V_{\mathcal{B}}(\omega) = Z_{\mathcal{B}}(\omega)I_{\mathcal{B}}(\omega) + V_{\mathcal{B}}^s(\omega) \quad (5.26)$$

où les super-matrices d'admittance et d'impédance

$$Y_{\mathcal{B}} = \oplus_{(m,n) \in \mathcal{B}} Y_{m-n}, \quad Z_{\mathcal{B}} = \oplus_{(m,n) \in \mathcal{B}} Z_{m-n} \quad (5.27)$$

Dans le prochain chapitre, dédié à l'étude du problème inverse, nous utiliserons ces équations afin d'introduire les équations de tensions et de courants vérifiées par les matrices d'admittance et d'impédance du réseau. Maintenant nous allons grouper les équations de diffusion aux noeuds pour l'ensemble des noeuds du réseau.

### 5.2.2 Concaténation des équations de diffusion

Les équations de diffusion (5.16) décrivent la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes à chaque noeud du réseau. Dans le but de concaténer ces équations à l'ensemble des noeuds du réseau, nous regroupons également les matrices de diffusion  $D_m$  et les termes  $\pi_m$  respectivement en super matrice de diffusion  $D_{\mathcal{B}}$  et en super vecteur  $\pi_{\mathcal{B}}$ .

Nous considérons la matrice d'interconnexion du réseau  $C_{w.w}$  de type *Onde-Onde* introduite dans [13] avec la notation  $W.W$ . Cette matrice décrit l'interconnexion des ondes entrantes et sortantes aux noeuds du réseau. Ces éléments  $(C_{w.w})_{i,j}$  avec  $(i,j) \in \{1, \dots, 2 \times \#B(\mathcal{G})\}^2$  sont définies par :

$$(C_{w.w})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si les ondes } (a_{\mathcal{B}})_i \text{ et } (b_{\mathcal{B}})_j \text{ sont évaluées en même noeud} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.28)$$

où  $(a_{\mathcal{B}})_i$  et  $(b_{\mathcal{B}})_j$  représentent respectivement la  $i^{\text{ème}}$  et la  $j^{\text{ème}}$  composante des super-vecteurs  $a_{\mathcal{B}}$  et  $b_{\mathcal{B}}$ .

La structure de la super-matrice  $D_{\mathcal{B}}$  est donnée par la structure de la matrice  $C_{w.w}$ . En effet, en supposant que :

$$(a_{\mathcal{B}})_i = a_{m,n} ; \quad (b_{\mathcal{B}})_j = b_{k,l} \quad (5.29)$$

nous distinguons deux cas possible :

- Si  $k \neq m$ , nous avons  $(C_{w.w})_{i,j} = 0$ . Par conséquent,

$$(D_{\mathcal{B}})_{i,j} = 0 \quad (5.30)$$

- Si  $k = m$ , nous avons  $(C_{w.w})_{i,j} = 1$ . Par conséquent,

$$(D_{\mathcal{B}})_{i,j} = d_{m,n:l} \quad (5.31)$$

où le coefficient  $d_{m,n;l}$  est un élément du coefficient  $D_m$  calculé localement au niveau du noeud  $N_m$ .

Avec les notations de (5.29), chaque composante  $(\pi_{\mathcal{B}})_i$  du super-vecteur  $\pi_{\mathcal{B}}$  est définie par :

$$(\pi_{\mathcal{B}})_i = \pi_{m:n} \quad (5.32)$$

**Cas particulier :** En supposant que les sources locales se trouvent uniquement aux noeuds terminaux et que la  $i^{\text{ème}}$  composante du super-vecteur  $b_{\mathcal{B}}$  est donnée par (5.29), nous définissons les composantes du super-vecteur  $\pi_{\mathcal{B}}$  par :

$$(\pi_{\mathcal{B}})_i = \begin{cases} 0 & \text{si } N_m \in \mathcal{E}^* \\ \pi_{m:n} & \text{si } N_m \in \mathcal{E}^\circ \end{cases} \quad (5.33)$$

**Définition 15.** Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$  dont chaque noeud  $N_m$  est caractérisé par l'équation de diffusion (5.16). Nous appelons l'équation des noeuds définie sur le réseau  $\mathcal{G}$ , l'équation suivante :

$$a_{\mathcal{B}}(\omega) = D_{\mathcal{B}}(\omega)b_{\mathcal{B}}(\omega) + \pi_{\mathcal{B}}(\omega) \quad (5.34)$$

Cette équation résulte de la concaténation des équations de diffusion (5.16).

### 5.2.3 Equation de BLT non uniforme

L'équation de BLT pour un réseau électrique mono-filaire, où l'inconnu est le super-vecteur des ondes  $a_{\mathcal{B}}$ , est obtenue en combinant l'équation des branches (5.23) et l'équation des noeuds (5.34).

**Définition 16.** Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$  dont les branches  $B_{m-n}$  pour  $m-n \in \mathcal{B}$  et les noeuds  $N_m$  pour  $m \in \mathcal{E}$  sont caractérisés respectivement par l'équation des branches (5.23) et l'équation des noeuds (5.34). Nous définissons l'équation de BLT non uniforme, définie sur le réseau  $\mathcal{G}$ , par l'équation suivante :

$$\left[ \mathbb{I} - D_{\mathcal{B}}(\omega)S_{\mathcal{B}}(\omega) \right] a_{\mathcal{B}}(\omega) = D_{\mathcal{B}}(\omega)\iota_{\mathcal{B}}(\omega) + \pi_{\mathcal{B}}(\omega) \quad (5.36)$$

qui résulte de l'élimination de  $b_{\mathcal{B}}(\omega)$  entre l'équation des branches (5.23) et l'équation des noeuds (5.34).

La résolution de l'équation de BLT (5.36) revient à résoudre un système linéaire avec un second membre et elle suppose la connaissance des super-matrices de scattering  $S_{\mathcal{B}}$  et de diffusion  $D_{\mathcal{B}}$  ainsi que les super-vecteurs  $\pi_{\mathcal{B}}$  et  $\iota_{\mathcal{B}}$ . Après la résolution de l'équation de BLT en  $a_{\mathcal{B}}$ , le vecteur des ondes sortantes des noeuds  $b_{\mathcal{B}}$  est déduite par l'équation des branches (5.23). L'équation de BLT (5.36) est dite non uniforme puisque les matrices de scattering contenues dans la super-matrice  $S_{\mathcal{B}}(\omega)$  décrivent les propagations des ondes dans des branches spatialement non uniformes.

Soit  $S_{m-n} = \begin{bmatrix} S_{n:m,m}(\omega) & S_{n:m,n}(\omega) \\ S_{m:n,m}(\omega) & S_{m:n,n}(\omega) \end{bmatrix}$ ,  $\forall x \in [x_m, x_n[$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{n:m,m}(\omega, x)}{dx} = q_{-m-n}(x)s_{n:m,m}^2(\omega, x) + 2(j\omega + q_{d_{m-n}}(x))s_{n:m,m}(\omega, x) \\ \quad - q_{+m-n}(x) \\ \frac{ds_{n:m,n}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_{d_{m-n}}(x) + q_{-m-n}(x)s_{n:m,m}(\omega, x))s_{n:m,n}(\omega, x) \\ \frac{ds_{m:n,m}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_{d_{m-n}}(x) + q_{-m-n}(x)s_{n:m,m}(\omega, x))s_{m:n,m}(\omega, x) \\ \frac{ds_{m:n,n}(\omega, x)}{dx} = -q_{-m-n}(x)s_{m:n,m}(\omega, x)s_{n:m,n}(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{m;n}(\omega, x)}{dx} = \left( j\omega + q_{d_{m-n}}(x) + q_{-m-n}(x)s_{n:m,m}(\omega, x) \right) \\ \quad \left( \iota_{m;n}(\omega, x) - \iota_{n;m}(\omega, x)s_{n:m,m}(\omega, x) \right) \\ \quad - c_{0_{m-n}}(x)\nu_{m,n}^s(\omega, x)s_{n:m,m}(\omega, x) + c_{0_{m-n}}(x)\nu_{n,m}^s(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{n;m}(\omega, x)}{dx} = s_{m:n,m}(\omega, x) \left( -q_{-m-n}(x)s_{n:m,m}(\omega, x)\iota_{n;m}(\omega, x) \right. \\ \quad \left. + q_{-m-n}(x)\iota_{m;n}(\omega, x) - c_{0_{m-n}}(x)\nu_{m,n}^s(\omega, x) \right) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} s_{n:m,m}(\omega, x_n) = s_{m:n,m}(\omega, x_n) = 0 ; \quad s_{m:n,m}(\omega, x_n) = s_{n:m,n}(\omega, x_n) = 1 \\ \iota_{m;n}(\omega, x_n) = \iota_{n;m}(\omega, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Dans la prochaine section, nous présentons une méthode numérique pour le calcul des matrices de scattering  $S_{m-n}$  de chaque branche  $B_{m-n}$  et les vecteurs ondes de sources  $\iota_{m:n}$ , nécessaires pour la construction de la super-matrice de scattering  $S_{\mathcal{B}}$  et le super-vecteur  $\iota_{\mathcal{B}}$ . Nous présentons également l'expression des matrices de diffusion  $D_m$  en fonctions de l'impédance  $Z_{s,m}$  et l'impédance caractéristique évaluée au noeud  $N_m$ .

## 5.3 Méthodes de calcul numérique

Le but de cette section est de proposer une méthode automatisée pour construire les super-matrices et super-vecteurs  $(S_{\mathcal{B}}, D_{\mathcal{B}}, \pi_{\mathcal{B}}, \iota_{\mathcal{B}})$  définissant l'équation BLT (5.36), à partir de la description topologique d'un réseau, et de la spécification des paramètres *RLCG* distribuée le long de chaque branche de manière non uniforme.

### 5.3.1 Matrices de scattering $S_{m-n}$ et vecteurs des sources $\iota_{m:n}$

Pour une branche  $B_{m-n}$  de réseau, vue comme une ligne de transmission, la méthode numérique qui permet de calculer la matrice de scattering  $S_{m-n}$  et le vecteur des ondes de sources  $\iota_{m:n}$  est déjà présentée dans le chapitre dédié aux lignes de transmission. Cette méthode est basée sur la résolution successive des équations différentielles ordinaires vérifiées par les éléments de la matrice  $S_{m-n}$  et du vecteur  $\iota_{m:n}$ .

En utilisant les indices des éléments des matrices de scattering, associées à une branche  $B_{m-n}$ , dans les équations différentielles vérifiées par les éléments de la matrice de scattering, comme dans la section 2.3.2, nous obtenons le système des équations différentielles (5.35), défini sur les branches  $B_{m-n}$ .

Les éléments de la matrice de scattering  $S_{m-n}$  et du vecteur  $\iota_{m:n}$  sont donc solutions du système des équations différentielles précédentes pour  $x = x_m$  correspondant à l'extrémité de la branche connectée au noeud  $N_m$ .

Le choix de l'orientation de l'axe des coordonnées de temps  $x$  (distance électrique) associé au choix du sens de courant dans la branche est arbitraire. Malgré ce choix arbitraire, sans besoin de vérification de la cohérence entre l'ensemble des branches, la solution du système des équations différentielles (5.35) à l'extrémité  $x_m$  est indépendante de ce choix.

Dans le simulateur numérique<sup>5</sup> dédié à ce chapitre, nous calculons les matrices de scattering et les vecteurs des ondes de sources à partir de la topologie du réseau et les caractéristiques de chaque branche.

### 5.3.2 Paramètres de diffusion définis aux noeuds

Dans la présente section, nous présentons des méthodes numériques de calcul des coefficients de diffusion  $D_m$  et les paramètres  $\pi_m$  aux noeuds terminaux et

---

5. Ce simulateur est réalisé en MatLab

intermédiaires d'un réseau électrique  $\mathcal{G}$ . Dans un premier temps, nous exprimons la matrice de diffusion  $D_m$  et le terme  $\pi_m$  associés à un noeud connecté à une source de tension  $V_{s,m}$  et une impédance  $Z_{s,m}$ . Dans un second temps, nous nous inspirons des travaux de J.P Parmantier [69] pour exprimer les matrices de diffusion  $D_m$  aux noeuds intermédiaires idéaux. Les techniques des calculs numériques proposées sont basées essentiellement sur l'exploitation des conditions aux noeuds de type (5.1) et (1.41- 1.42).

### 5.3.2.1 Cas des noeuds non idéaux

**Proposition 8.** *Considérons un noeud intermédiaire  $N_m$ , connecté à une source de tension  $V_{s,m}$  et une impédance  $Z_{s,m}$ . Le coefficient de diffusion  $D_m$  et le paramètre  $\pi_m$  sont donnés par :*

$$D_m(\omega) = (\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I})^{-1} (\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} - \mathbb{I}) \quad (5.37)$$

$$\pi_m(\omega) = -2(\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I})^{-1} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} V_{s,\mathcal{C}_m} \quad (5.38)$$

où les matrices  $\zeta_{\mathcal{C}_m}$  et  $Z_{s,\mathcal{C}_m}$  et le vecteur  $V_{s,\mathcal{C}_m}$  sont définis ci-dessous.

**Définition 17.**

- La matrice  $\zeta_{\mathcal{C}_m}$  est une matrice diagonale contenant les impédances caractéristiques  $\zeta_{\infty_{m-n}}(x_m)$  pour  $n \in \mathcal{C}_m$ .
- La matrice  $Z_{s,\mathcal{C}_m}$  est une matrice carrée pleine, de taille  $\#\mathcal{C}_m \times \#\mathcal{C}_m$  dont chacun de ses éléments vaut l'impédance  $Z_{s,m}$ .
- Les composantes du vecteur  $V_{s,\mathcal{C}_m}$  valent la tension  $V_{s,m}$  de la source locale.

La preuve de la Proposition 8 aura besoin du Lemme suivant.

**Lemme 1.** *Si les impédances  $Z_{s,m}$  connectées aux noeuds  $N_m$  pour  $m \in \mathcal{E}$  sont passive, les inductances  $L_{m-n}$  et les capacités  $C_{m-n}$  des branches  $B_{m-n}$  sont positives alors la matrice  $Z_{s,\mathcal{C}_m} + \zeta_{\mathcal{C}_m}$  est inversible*

**Preuve du Lemme 1.** Considérons un noeuds  $N_m$  pour  $m \in \mathcal{E}$ . Nous supposons que  $\mathcal{C}_m = \{n_1, n_2, \dots, n_{\#\mathcal{C}_m}\}$ . Étant donnée que la matrice  $(Z_{s,\mathcal{C}_m} + \zeta_{\mathcal{C}_m})$  est symétrique réelle, pour démontrer qu'elle est inversible, nous allons montrer que cette matrice est définie positive. C'est à dire,  $\forall X \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{C}_m}$  non nul,  $X^T (Z_{s,\mathcal{C}_m} + \zeta_{\mathcal{C}_m}) X > 0$ . Soit  $X := [x_n]_{n \in \mathcal{C}_m} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{C}_m}$  non nul. Nous avons,

$$X^T (Z_{s,\mathcal{C}_m} + \zeta_{\mathcal{C}_m}) X = [\dots, (Z_{s,m} + \zeta_{\infty_{m-n_i}}(x_m))x_i + \sum_{(k,l) \in \mathcal{C}_m - \{n_i\}} Z_{s,m} x_k, \dots] \quad (5.39)$$

d'où,

$$X^T (Z_{s,\mathcal{C}_m} + \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-1}) X = [\dots, (Z_{s,m} + \zeta_{\infty_{m-n_i}}(x_m))x_i^2 + \sum_{k \in \mathcal{C}_m - \{n_i\}} \sum_{l \in \mathcal{C}_m} Z_{s,m} x_k x_l, \dots]$$

$\Rightarrow$

$$X^T (Z_{s,C_m} + \zeta_{C_m}^{-1}) X = [\dots, \zeta_{\infty_{m-n_i}}(x_m) x_i^2 + \sum_{k \in C_m} \sum_{l \in C_m} Z_{s,m} x_k x_l, \dots] \quad (5.40)$$

$$= [\dots, \zeta_{\infty_{m-n_i}}(x_m) x_i^2 + Z_{s,m} \left( \sum_{k \in C_m} x_k \right)^2, \dots] \quad (5.41)$$

Puisque les impédances caractéristiques en haute fréquence des branches et les impédances  $Z_{s,m}$  sont positives, d'après la relation (5.41), nous avons,  $\forall X \in \mathbb{R}^{\#C_m}$  non nul,  $X^T (Z_{s,C_m} + \zeta_{C_m}^{-1}) X > 0$  d'où l'inversibilité de la matrice  $(Z_{s,C_m} + \zeta_{C_m}^{-1})$ .  $\square$

**Preuve de la Proposition 8.** Considérons un noeud  $N_m$  connecté à l'ensemble des branches  $\{B_{m-n}\}$  pour  $n \in C_m = \{n_1, n_2, \dots, n_{\#C_m}\}$ .

Nous notons  $I_m := [I_{m,n}]_{n \in C_m}$  et  $V_m := [V_{m,n}]_{n \in C_m}$  respectivement le vecteur des courants sortants du noeuds  $N_m$  et le vecteur des tensions aux extrémités des branches  $B_{m-n}$  connectées au noeud  $N_m$ .

$$I_m = [I_{m,n_1} \quad I_{m,n_2} \quad \dots \quad I_{m,n_{\#C_m}}]^T, \quad V_m = [V_{m,n_1} \quad V_{m,n_2} \quad \dots \quad V_{m,n_{\#C_m}}]^T \quad (5.42)$$

D'après les conditions aux noeuds (5.1) et la continuité des tensions, c'est à dire,

$$\forall n \in C_m, \quad V_{m,n} = V_{m,0} \quad (5.43)$$

nous avons,

$$\forall n \in C_m, \quad V_{m,n}(\omega) - Z_{s,m}(\omega) I_{m,0}(\omega) = V_{s,m}(\omega) \quad (5.44)$$

D'après la relation (1.40), nous avons,

$$V_m(\omega) + Z_{s,C_m}(\omega) I_m(\omega) = V_{s,C_m}(\omega) \quad (5.45)$$

Il est à remarquer que, puisque les éléments de la matrice  $Z_{s,C_m}(\omega)$  sont tous égaux à  $Z_{s,m}(\omega)$ , le produit  $Z_{s,C_m}(\omega) I_m(\omega)$  équivaut à un vecteur dont chacune de ses composantes représente la somme des courants en un noeud  $N_m$  du réseau multipliée par  $Z_{s,m}(\omega)$ .

D'autre part, d'après la définition du courant  $I_{m,n}$  et de la tension  $V_{m,n}$  en termes des ondes  $a_{m,n}$  et  $b_{m,n}$ , nous avons l'écriture matricielle suivante :

$$V_m(\omega) = \frac{1}{2} \zeta_{C_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) (a_m(\omega) + b_m(\omega)), \quad I_m(\omega) = \frac{1}{2} \zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) (a_m(\omega) - b_m(\omega)) \quad (5.46)$$

En remplaçant  $I_m$  et  $V_m$  dans (5.45), nous obtenons la relation suivante :

$$\zeta_{C_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) (a_m(\omega) + b_m(\omega)) + Z_{s,C_m}(\omega) \zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) (a_m(\omega) - b_m(\omega)) = 2V_{s,C_m}(\omega) \quad (5.47)$$

En omettant la pulsation  $\omega$ , nous réécrivons cette relation sous la forme suivante :

$$(\zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,C_m} \zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I}) a_m = (\zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,C_m} \zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}} - \mathbb{I}) b_m + 2\zeta_{C_m}^{-\frac{1}{2}} V_{s,C_m} \quad (5.48)$$

En tenant compte du Lemme 1, la matrice  $\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I}$  est inversible. D'après la relation (5.48) et la définition de  $D_m$  et de  $\pi_m$  dans (5.16), on obtient donc :

$$D_m(\omega) = (\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I})^{-1} (\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} - \mathbb{I}) \quad (5.49)$$

$$\pi_m(\omega) = 2(\zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} Z_{s,\mathcal{C}_m} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I})^{-1} \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}} V_{s,\mathcal{C}_m} \quad (5.50)$$

□

En un noeud terminal, connecté à une branche  $B_{m-n}$ , le paramètre de diffusion  $D_m$  et le paramètre  $\pi_m$  sont des scalaires. En effet, d'après la proposition 8, nous avons,

$$D_m(\omega) = \frac{Z_{s,m}(\omega) - \zeta_{\infty_{m-n}}(x_m)}{Z_{s,m}(\omega) + \zeta_{\infty_{m-n}}(x_m)} ; \quad \pi_m(\omega) = \frac{2\zeta_{\infty_{m-n}}^{\frac{1}{2}}(x_m)V_{s,m}(\omega)}{Z_{s,m}(\omega) + \zeta_{\infty_{m-n}}(x_m)} \quad (5.51)$$

Selon les valeurs de  $Z_{s,m}$  nous distinguons les trois cas particuliers suivants :

- $Z_{s,m}(\omega) = 0$  : nous avons un court circuit d'où  $D_m(\omega) = -1$ .
- $Z_{s,m}^{-1}(\omega) = 0$  : nous avons un circuit ouvert d'où  $D_m(\omega) = 1$ .
- $Z_{s,m}(\omega) = \zeta_{\infty_{m-n}}(x_m)$  : l'impédance  $Z_{s,m}$  est adaptée à la branche. Le coefficient de diffusion  $D_m$  est nul.

**Cas des noeuds idéaux.** Dans le cas d'un noeud idéal  $N_m$ , c'est à dire, dans le cas de l'absence de source et d'impédance à ce noeud. Nous considérons la continuité des courants et des tensions, c'est à dire, les conditions de Kirchhoff (1.41- 1.42). En réécrivant ces conditions matriciellement, nous obtenons,

$$K_I I_m(\omega) = 0 \quad (5.52)$$

$$K_V V_m(\omega) = 0 \quad (5.53)$$

où  $K_I$  et  $K_V$  sont des matrices de tailles respectivement  $1 \times \#\mathcal{C}_m$  et  $(\#\mathcal{C}_m - 1) \times \#\mathcal{C}_m$  telles que :

$$K_I = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1], \quad K_V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

**Proposition 9.** *Considérons un noeud intermédiaires  $N_m$  idéal, l'intersection des branches  $B_{m-n}$  avec  $n \in \mathcal{C}_m$ . Le paramètre  $\pi_m$  est un vecteur nul et le coefficient de diffusion  $D_m$  s'exprime par :*

$$D_m(\omega) = \begin{bmatrix} K_V \zeta_{\mathcal{C}_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) \\ K_I \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -K_V \zeta_{\mathcal{C}_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) \\ K_I \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

**Preuve de la Proposition 9.** Considérons un noeud intermédiaire  $N_m$  idéal. D'après la définition des vecteurs des courants  $I_m$  et des tensions  $V_m$  (5.46) en termes des vecteurs des ondes  $a_m$  et  $b_m$ , les conditions de Kirchhoff aux noeuds (1.41) deviennent :

$$\begin{cases} K_V \zeta_{\mathcal{C}_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) a_m(\omega) &= -K_V \zeta_{\mathcal{C}_m}^{\frac{1}{2}}(\omega) b_m(\omega) \\ K_I \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) a_m(\omega) &= K_I \zeta_{\mathcal{C}_m}^{-\frac{1}{2}}(\omega) b_m(\omega) \end{cases} \quad (5.56)$$

d'où l'équation de diffusion au noeud  $N_m$  :

$$a_m(\omega) = D_m(\omega) b_m(\omega) \quad (5.57)$$

où la matrice  $D_m$  est définie par (5.55).

La matrice de diffusion  $D_m$  est exprimée en fonction de la matrice des impédances caractéristiques des branches  $B_{m-n}$  connectées au noeud  $N_m$  et les matrices  $K_V$  et  $K_I$ . Cette technique de calcul est utilisée par J.P Parmantier dans [69] pour calculer les coefficients de scattering aux noeuds idéaux d'un réseau des lignes multi-conducteurs.  $\square$

**Remarque 32.** *Sous l'hypothèse de la continuité de l'impédance caractéristique en haute fréquence aux noeuds intermédiaires, c'est à dire,*

$$\zeta_{\infty-n_i}(x_m) = \zeta_{\infty-n_j}(x_m), \quad \forall (n_i, n_j) \in \mathcal{C}_m \quad (5.58)$$

*nous simplifions l'expression du coefficient de diffusion  $D_m$  et nous écrivons,*

$$D_m(\omega) = \begin{bmatrix} K_V \\ K_I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -K_V \\ K_I \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

## 5.4 Exemples de simulations numériques de l'équation de BLT

Le simulateur numérique dédié à la résolution de l'équation de BLT non uniforme est mis en œuvre en MatLab. Il nous permet de calculer les ondes entrantes et sortantes des extrémités de chaque branche du réseau en connaissant les caractéristiques des branches et des noeuds. Nous pouvons donc déduire le courant, la tension et les coefficients de réflexion aux noeuds du réseau. Dans cette section, nous présentons deux exemples de simulation numérique. Dans un premier exemple, nous testons le simulateur pour un réseau électrique  $\mathcal{G}$  contenant une boucle. Dans un second exemple, nous considérons un réseau électrique en arbre constitué des branches homogènes. Nous comparons le coefficient de réflexion simulé par l'équation de BLT avec des mesures réelles au niveau de la source. Cette comparaison permet de valider partiellement le simulateur numérique.

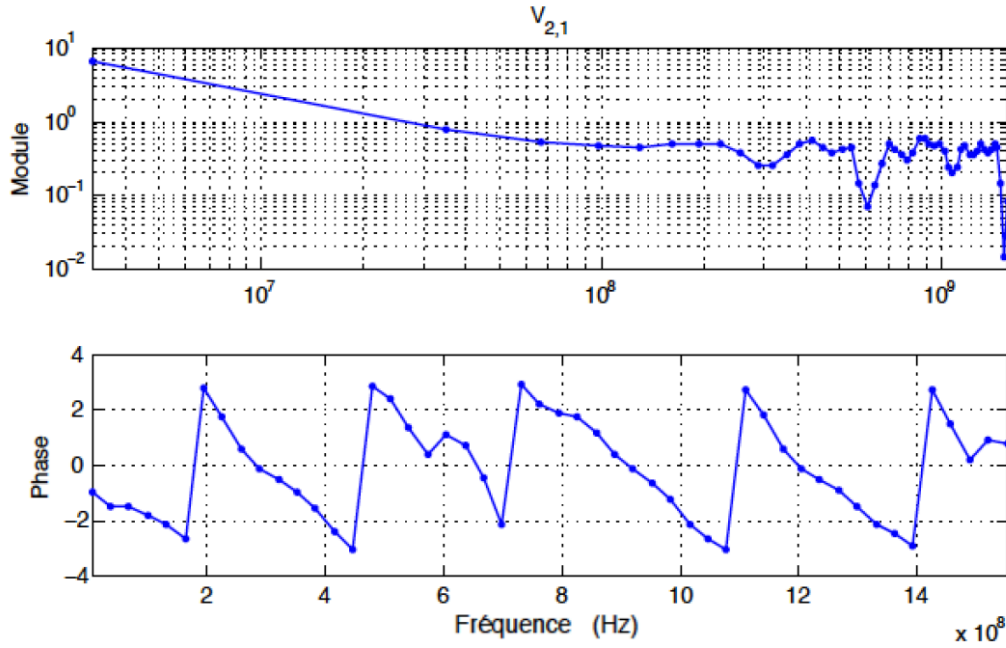


TABLE 5.1 – Caractéristiques des branches du réseau de la Figure 5.1.

Branches	$L_{m-n} (H/m)$	$R_{m-n} (\Omega/m)$	$G_{m-n} (S/m)$	$C_{m-n} (F/m)$	$\ell_{m-n} (m)$
$B_{1-2}$	$0.278 \times 10^{-6}$	0	0	$60.5 \times 10^{-12}$	5
$B_{2-3}$	égalité (5.60)	$2 \times 10^{-1}$	$9 \times 10^{-5}$	$60.5 \times 10^{-12}$	3
$B_{2-4}$	égalité (5.61)	0	0	$60.5 \times 10^{-12}$	1.5
$B_{3-4}$	$0.278 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-7}$	$60.5 \times 10^{-12}$	2

#### 5.4.1 Courants et tensions associés à un réseau contenant une boucle

Considérons le réseau électrique  $\mathcal{G}$  de la Figure 5.1. Il est formé de 4 branches  $B_{m-n}$  avec  $m-n \in \{1-2, 2-3, 2-4, 3-4\}$  et 4 noeuds  $N_m$ . Le noeud intermédiaire  $N_2$  est idéal et les autres noeuds  $N_m$ , pour  $m \in \{1, 3, 4\}$ , sont connectés à des sources de tension  $V_{s,m}(\omega) = 12$  Volt et des impédance  $Z_{s,m}(\omega) = 120 \Omega$ . Les matrices de connectivité sont similaires aux matrices  $C_{N.N}$ ,  $C_{N.I}$  et  $C_{w.w}$  définies respectivement par (1), (2) et (3).

FIGURE 5.2 – Modules et phases de la tension  $V_{2,3}$  simulés au noeud  $N_2$ .

Nous supposons que les branches  $B_{m-n}$  sont des câbles bifilaires caractérisées par une inductance  $L_{m-n} = 278 \times 10^{-9} H/m$  et une capacité  $C_{m-n} = 60.5 \times 10^{-12} F/m$ .

Dans cet exemple, nous introduisons des pertes et des défauts non francs le long de certaines branches. Nous considérons les inductances, des branches  $B_{2-3}$  et  $B_{2-4}$ , en fonction de la distance électrique  $x$ , suivantes :

$$L_{2-3}(x) = 10^{-6} \times \left( \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \int_0^{60(x-0.3)} e^{-t^2} dt + 0.29 \right) \quad (5.60)$$

$$L_{2-4}(x) = 10^{-6} \times (0.05e^{-5000(x-0.13)^2} + 0.28) \quad (5.61)$$

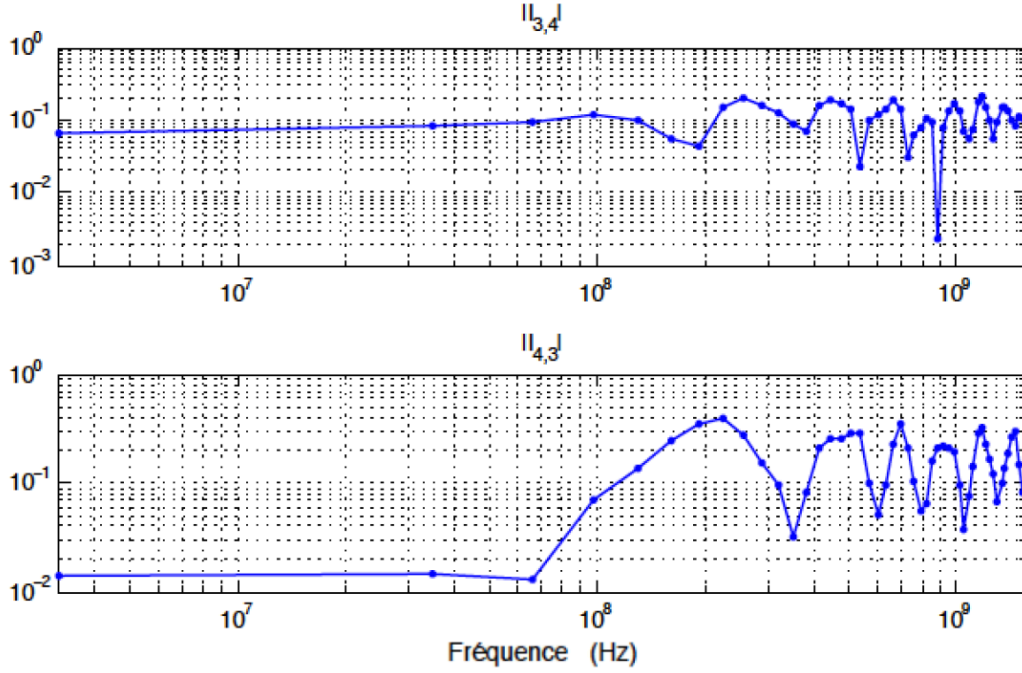


FIGURE 5.3 – Modules des courants électriques simulés aux extrémités de  $B_{3-4}$ .

Dans le Tableau 5.1, nous présentons, en unités de mesures internationales, les caractéristiques des branches utilisées dans les simulations numériques. Nous rappelons que, dans ce cas, le réseau  $\mathcal{G}_0$  est alimenté par trois sources de tensions. Cette situation n'est pas classique dans l'expérience de la réflectométrie.

La Figure 5.2 représente le module et la phase de la tension au noeud intermédiaire  $N_2$ . Dans les Figures 5.3 et 5.4 nous représentons respectivement les modules, avec des échelles logarithmiques, des courants et des tensions aux deux extrémités de la branche  $B_{3-4}$ .

#### 5.4.2 Comparaison des simulations avec des mesures

Dans cet exemple de simulations numérique, nous reprenons le réseau électrique en arbre  $\mathcal{G}$  simulé dans le troisième chapitre et qui est décrit par le graphe de

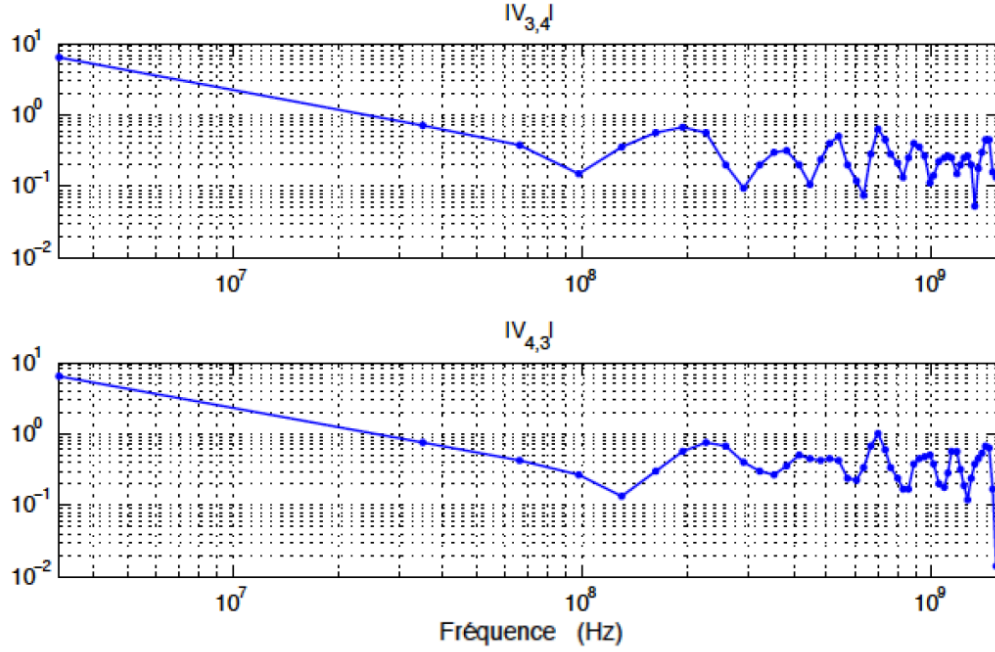
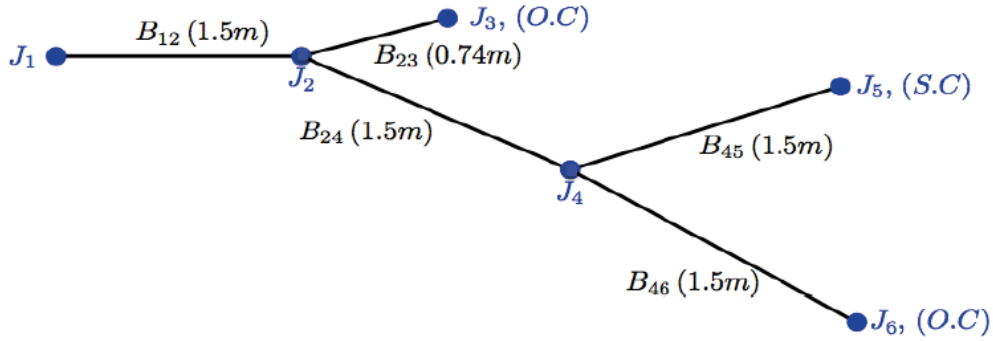
FIGURE 5.4 – Modules des tensions simulés aux extrémités de  $B_{3-4}$ .

FIGURE 5.5 – Graphe représentant un un exemple d'un réseau électrique en arbre.

la Figure 5.5. Nous rappelons que ce réseau est formé des câbles coaxiaux  $50 \Omega$  de coefficient de vélocité  $c_0 = 2.478 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . L'inductance et la capacité de chaque branche  $B_{m-n}$  valent donc  $L_{m-n} = 0.2018 \times 10^{-6} \text{ H/m}$  et  $C_{m-n} = 0.0807 \times 10^{-9} \text{ H/m}$ .

Lors de l'expérience de la réflectométrie, nous avons mesuré le coefficient de réflexion au noeud  $N_1$  avec un analyseur de réseau en adaptant l'impédance de l'analyseur à la branche  $B_{1-2}$ . Les noeuds  $N_2$  et  $N_4$  sont idéaux et les autres noeuds sont terminés par un court circuit ou un circuit ouvert comme il est illustré dans la Figure 5.5.

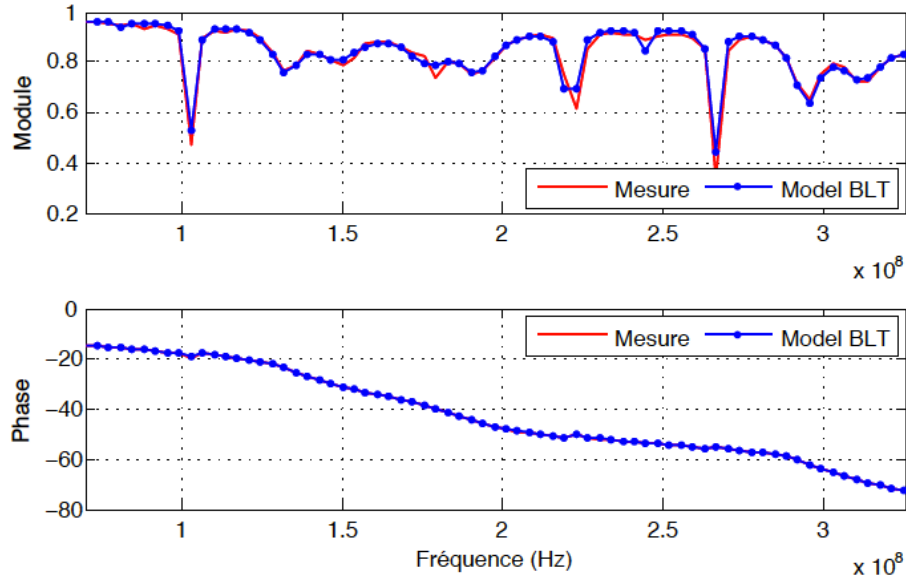


FIGURE 5.6 – Comparaison du coefficient de réflexion mesuré et simulé au noeud  $N_1$ .

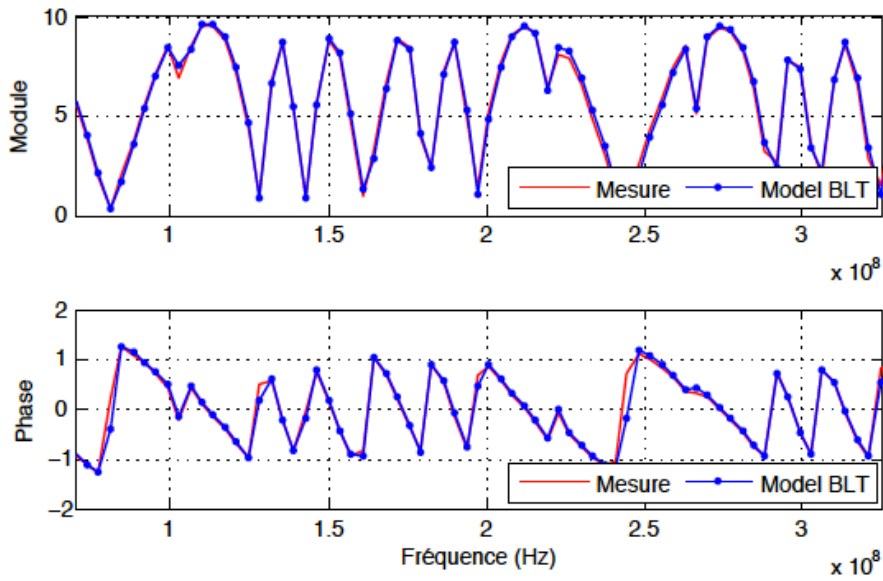


FIGURE 5.7 – Comparaison de la tension mesuré et simulé au noeud  $N_1$ .

Après avoir résolu l'équation de BLT en ondes incidente et réfléchie, nous calculons le coefficient de réflexion au noeud  $N_1$  qui est le rapport entre l'onde réfléchie et l'onde incidente associées au courant  $I_{1,2}$  et à la tension  $V_{1,2}$ . La Figure 5.6 repré-

sente la comparaison entre le module et la phase de coefficient de réflexion simulé et mesuré.

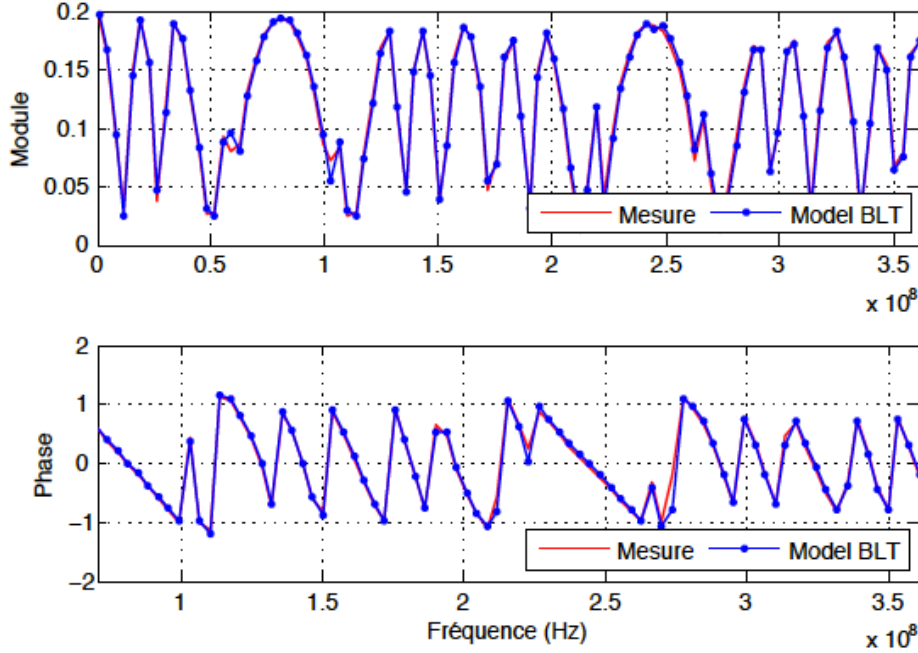


FIGURE 5.8 – Comparaison du courant mesuré et simulé au noeud  $N_1$ .

D'après les conditions aux bords (1.34), associées aux équations des télégraphistes, nous pouvons calculer le courant et la tension au noeuds  $N_1$ , en utilisant le coefficient de réflexion mesuré. Dans le présent exemple, nous avons,

$$\rho_l(\omega) = 0, \quad V_l(\omega) = 1 \text{ Volt}$$

Les Figures 5.7 et 5.8 représentent respectivement le module et la phase de la tension et du courant, simulés et déduits via le coefficient de réflexion mesuré qui est présenté dans la Figure 5.6.

Cet exemple a été utilisé dans [66] et [67]. Dans cet exemple de simulations numériques, nous avons un bon accord entre les mesures et les simulations du coefficient de réflexion, en un noeud du réseau, qui nous permet de valider le simulateur dédié à la résolution de l'équation de BLT.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique de calcul des matrices de scattering associées aux branches non uniformes du réseau et des vecteurs d'ondes

des sources distribuées ramenées aux extrémités des branches. Elle est basée sur la résolution des équations différentielles ordinaires. Nous avons présenté également les expressions des coefficients de diffusion définis aux noeuds du réseau.

Ces méthodes numériques nous permet d'automatiser le calcul de la solution numérique de l'équation de BLT généralisée aux réseaux électriques non uniformes.

La modélisation des réseaux électriques par l'équation de BLT est un premier pas pour étudier un problème inverse sur un réseau électrique général.



# Problème inverse des réseaux électriques via la matrice d'admittance

Dans le présent chapitre, nous étudions un problème inverse sur des réseaux électriques de structure topologique générale en utilisant *l'équation des tensions* qui exprime les tensions aux noeuds du réseau en fonction des caractéristiques des branches et des noeuds. Cette équation est similaire à l'équation de BLT présentée dans le chapitre précédent qui est vérifiée par les ondes de puissance entrantes dans les extrémités des branches. En effet, des variantes de l'équation de BLT peuvent être déduites en remplaçant les ondes de puissances par des ondes de tension ou de courant. Le choix des ondes de tensions est en raison d'une propriété de la matrice d'admittance du réseau que nous allons exploiter pour formuler et résoudre un problème inverse.

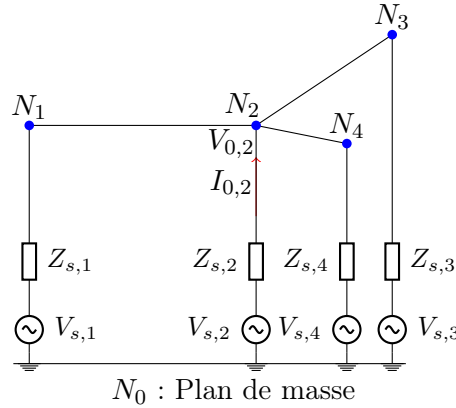


FIGURE 6.1 – Exemple d'un réseau électrique en  $Y$ .

L'objectif de cette étude est d'identifier, au moins partiellement, la matrice d'admittance  $Y_{m-n}$  (de taille  $2 \times 2$ ) de chaque branche du réseau à partir de la matrice d'admittance globale du réseau (de taille  $\#N(\mathcal{G}) \times \#N(\mathcal{G})$ ), qui peut être déduite d'un certain nombre d'expériences faites aux noeuds. Lors de cette étude, nous traitons le problème inverse en considérant un réseau électrique  $\mathcal{G}$  de topologie quelconque et formé de lignes de transmission non uniformes avec pertes. Pour se mettre dans les conditions classiques de l'expérience de la réflectométrie, nous supposons



que les sources de tensions  $V_{m,n}^s$  et de courants  $I_{m,n}^s$  distribuées sont nulles le long des branches du réseau. Nous supposons également que les noeuds du réseau sont caractérisés par les conditions aux noeuds de type (5.1). La particularité de cette étude est d'effectuer des mesures de tension à l'ensemble des noeuds du réseau et d'exclure les réseaux qui contiennent des noeuds idéaux.

**H 22.** Les noeuds du réseau  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$  sont connectés à des impédances de charges non nulles.

**Remarque 33.** Malgré les observations sur tous les noeuds d'un réseau, le problème inverse considéré reste non trivial, car les observations en un noeud  $N_m$  ne permettent pas de connaître les courants dans toutes les branches connectées au noeud  $N_m$ .

Afin de mettre en oeuvre l'étude du problème inverse, en utilisant la matrice d'admittance, nous commençons le chapitre par la formulation des éléments principaux du problème inverse sur l'exemple du réseau électrique de la Figure 6.1. Ensuite, nous étendons cette formulation à un réseau  $\mathcal{G}$  quelconque.

## 6.1 Formulation du problème inverse sur un exemple

Considérons le réseau électrique de la Figure 6.1. Nous avons,

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{B} = \{1-2, 2-3, 2-4\} \quad (6.1)$$

En absence des sources de courants et de tensions distribuées le long des branches, l'équation de branches (5.25), définie par la super-matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$ , associée au réseau de la Figure 6.1, est donnée par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{1,2} \\ I_{2,1} \\ I_{2,3} \\ I_{3,2} \\ I_{2,4} \\ I_{4,2} \end{bmatrix}}_{I_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{2:1,1} & y_{2:1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1:2,1} & y_{1:2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{3:2,2} & y_{3:2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{2:3,2} & y_{2:3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{4:2,2} & y_{4:2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{2:4,2} & y_{2:4,4} \end{bmatrix}}_{Y_{\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{1,2} \\ V_{2,1} \\ V_{2,3} \\ V_{3,2} \\ V_{2,4} \\ V_{4,2} \end{bmatrix}}_{V_{\mathcal{B}}} \quad (6.2)$$

Nous rappelons que la super-matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$  est formée par les éléments des matrices d'admittance  $Y_{m-n}$  des branches  $B_{m-n}$ . En faisant des expériences aux noeuds, nous pouvons connaître les tensions du vecteur  $V_{\mathcal{B}}$ , mais nous ne pouvons pas déterminer les courants  $I_{2,1}$ ,  $I_{2,3}$ ,  $I_{2,4}$  du vecteur  $I_{\mathcal{B}}$  à cause des branches multiples connectées au noeud  $N_2$ . Il est donc impossible d'utiliser directement l'équation (6.2) pour identifier les éléments de la super-matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$ .

D'après l'expression du courant  $I_{m,0}$  au noeud  $N_m$  (1.40) et la continuité des tensions aux noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$ , les courants et les tensions aux extrémités des

noeuds du réseau satisfont,

$$- \begin{bmatrix} I_{1,0} & I_{2,0} & I_{3,0} & I_{4,0} \end{bmatrix}^T = C_{N,I} \begin{bmatrix} I_{1,2} & I_{2,1} & I_{2,3} & I_{3,2} & I_{2,4} & I_{4,2} \end{bmatrix}^T \quad (6.3)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1,2} & V_{2,1} & V_{2,3} & V_{3,2} & V_{2,4} & V_{4,2} \end{bmatrix}^T = C_{N,I}^T \begin{bmatrix} V_{1,0} & V_{2,0} & V_{3,0} & V_{4,0} \end{bmatrix}^T \quad (6.4)$$

où  $C_{N,I}$  est une matrice définie par :

$$C_{N,I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

En remplaçant (6.3) et (6.4) dans (6.2), nous obtenons l'équation suivante,

$$- \begin{bmatrix} I_{1,0} \\ I_{2,0} \\ I_{3,0} \\ I_{4,0} \end{bmatrix} = \underbrace{C_{N,I} Y_{\mathcal{B}} C_{N,I}^T}_{Y_{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} V_{1,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ V_{4,0} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

La matrice

$$Y_{\mathcal{E}} := C_{N,I} Y_{\mathcal{B}} C_{N,I}^T \quad (6.7)$$

représente la matrice d'admittance du réseau de la Figure 6.1 et elle est définie par la relation (6.6).

Après avoir effectué les produits matriciels avec  $Y_{\mathcal{B}}$  comme dans (6.6), nous obtenons

$$Y_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} y_{2:1,1} & y_{2:1,2} & 0 & 0 \\ y_{1:2,1} & y_{1:2,2} + y_{3:2,2} + y_{4:2,2} & y_{3:2,3} & y_{4:2,4} \\ 0 & y_{2:3,2} & y_{2:3,3} & 0 \\ 0 & y_{2:4,2} & 0 & y_{2:4,4} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Dans la suite, nous généraliserons cette matrice au cas d'un réseau électrique de structure topologique générale. L'équation (6.6) pourrait être utilisée pour déterminer la matrice  $Y_{\mathcal{E}}$  si nous disposons directement des mesures sur les courants et les tensions qui sont impliqués. En pratique il est moins facile de mesurer les courants, donc nous allons combiner l'équation  $Y_{\mathcal{B}}$  avec l'équation qui traduit les conditions des noeuds, pour éliminer le vecteur des courants aux noeuds. Dans la Figure 6.1, d'après les conditions aux noeuds (5.1), ces courants et ces tensions vérifient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{1,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ V_{4,0} \end{bmatrix} - Z_{s,\mathcal{E}} \begin{bmatrix} I_{1,0} \\ I_{2,0} \\ I_{3,0} \\ I_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s,1} \\ V_{s,2} \\ V_{s,3} \\ V_{s,4} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

où  $Z_{s,\mathcal{E}}$  est une matrice diagonale contenant les impédances  $Z_{s,m}$  connectées aux noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$ . En combinant les équations (6.6) et (6.9) nous obtenons l'équation des tensions suivante :

$$\left( \mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}} Y_{\mathcal{E}} \right) \begin{bmatrix} V_{1,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ V_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s,1} \\ V_{s,2} \\ V_{s,3} \\ V_{s,4} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Maintenant, nous supposons que le vecteur des tensions aux noeuds peut être mesuré. Nous supposons aussi connaître les tensions des sources  $V_{s,m}$  et les impédances  $Z_{s,m}$  aux noeuds  $N_m$ . L'étude du problème inverse sur le réseau de la Figure 6.1 consiste, dans un premier temps, à déterminer la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  puis dans un deuxième temps à déduire des informations sur les éléments des matrices d'admittance des branches contenus dans la matrice  $Y_{\mathcal{E}}$  telle que exprimée dans l'équation (6.8).

$S_{\mathcal{E}}$  = Les deux premières colonnes :

$$\begin{bmatrix} \frac{s_{00}^1 s_{00}^2 + s_{00}^1 s_{00}^3 + s_{00}^2 s_{00}^3 + 2s_{00}^1 s_{00}^2 s_{00}^3 - 1}{s_{00}^1 + s_{00}^2 + s_{00}^3 - s_{00}^1 s_{00}^2 s_{00}^3 + 2} & \frac{s_{01}^1 (s_{00}^2 + 1)(s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^2 + s_{00}^3 - s_{00}^1 (s_{00}^2 s_{00}^3 - 1) + 2} \\ \frac{s_{10}^0 (s_{00}^2 + 1)(s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^2 + s_{00}^3 - s_{00}^1 (s_{00}^2 s_{00}^3 - 1) + 2} & \frac{s_{10}^0 s_{01}^1 (s_{00}^2 s_{00}^3 - 1)}{s_{00}^2 + s_{00}^3 - s_{00}^1 (s_{00}^2 s_{00}^3 - 1) + 2} - \frac{s_{11}^0 - s_{11}^0 s_{00}^2 s_{00}^3}{s_{00}^2 s_{00}^3 - 1} \\ \frac{s_{20}^0 (s_{00}^2 + 1)(s_{00}^3 + 1)}{(s_{00}^1 + s_{00}^3 - s_{00}^2 (s_{00}^1 s_{00}^3 - 1) + 2)} & \frac{s_{20}^0 s_{01}^1 (s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^3 - s_{00}^2 (s_{00}^1 s_{00}^3 - 1) + 2} \\ \frac{s_{30}^0 (s_{00}^2 + 1)(s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} & \frac{s_{30}^0 s_{01}^1 (s_{00}^2 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} \end{bmatrix}$$

Les deux dernières colonnes :

$$\begin{bmatrix} \frac{s_{02}^2 (s_{00}^1 + 1)(s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^3 - s_{00}^2 (s_{00}^1 s_{00}^3 - 1) + 2} & \frac{s_{03}^3 (s_{00}^1 + 1)(s_{00}^2 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} \\ \frac{s_{10}^0 s_{02}^2 (s_{00}^3 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^3 - s_{00}^2 (s_{00}^1 s_{00}^3 - 1) + 2} & \frac{s_{10}^0 s_{03}^3 (s_{00}^2 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} \\ \frac{s_{20}^0 s_{02}^2 (s_{00}^3 - 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^3 - s_{00}^2 (s_{00}^1 s_{00}^3 - 1) + 2} - \frac{s_{22}^0 - s_{22}^0 s_{00}^1 s_{00}^3}{s_{00}^1 s_{00}^3 - 1} & \frac{s_{20}^0 s_{03}^3 (s_{00}^1 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} \\ \frac{s_{30}^0 s_{02}^2 (s_{00}^1 + 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} & \frac{s_{30}^0 s_{03}^3 (s_{00}^2 - 1)}{s_{00}^1 + s_{00}^2 - s_{00}^3 (s_{00}^1 s_{00}^2 - 1) + 2} - \frac{s_{33}^0 - s_{33}^0 s_{00}^1 s_{00}^2}{s_{00}^1 s_{00}^2 - 1} \end{bmatrix}$$

FIGURE 6.2 – La matrice de scattering globale du réseau de la Figure 6.1.

La raison de travailler avec la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  est la simplicité de sa décomposition en termes des éléments des matrices d'admittance des branches du réseau (6.8). En effet, la complexité de la décomposition des matrices de scattering et

d'impédance, associées à un réseau  $\mathcal{G}$ , ne nous permet pas de résoudre un problème inverse similaire.

Dans le cas particulier du réseau de la Figure 6.1, la décomposition de cette matrice de scattering<sup>1</sup> est donnée dans la Figure 6.2.

**Remarque 34.** *La combinaison des équations (6.6) et (6.9) nous fournit également l'équation des courants suivante :*

$$(Z_{\mathcal{E}} + Z_{s,\mathcal{E}}) \begin{bmatrix} I_{1,0} \\ I_{2,0} \\ I_{3,0} \\ I_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s,1} \\ V_{s,2} \\ V_{s,3} \\ V_{s,4} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

où  $Z_{\mathcal{E}}$  représente la matrice d'impédance du réseau de la Figure 6.1. Elle est définie par :

$$\begin{bmatrix} V_{1,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ V_{4,0} \end{bmatrix} = -Z_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} I_{1,0} \\ I_{2,0} \\ I_{3,0} \\ I_{4,0} \end{bmatrix}$$

L'étude du problème inverse via l'équation des courant (6.11) est possible, mais elle est compliquée parce que la décomposition de  $Z_{\mathcal{E}}$ , par analogie à (6.6), est beaucoup plus difficile.

## 6.2 Principaux outils de l'étude du problème inverse

Après l'exemple étudié dans la section 6.1, dans l'intention de généraliser l'équation des tensions qui exprime les tensions aux noeuds  $V_{m,0}$  en fonctions des caractéristiques des branches (les paramètres d'admittance et et les longueurs de chaque branche) et des noeuds  $(Z_{s,m}, V_{s,m})$ , nous formulons les relations qui relient les tensions et les courants à l'ensemble des noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$ . Ces relations sont définies par les matrices d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$ , d'impédance  $Z_{\mathcal{E}}$  et la matrice diagonale des impédances de charge  $Z_{s,\mathcal{E}}$ .

### 6.2.1 Caractérisation des noeuds du réseau

Nous caractérisons l'ensemble des noeuds du réseau soit par les matrices d'admittances et d'impédances du réseau, soit par les sources et les impédances connectées aux noeuds.

#### 6.2.1.1 Par les matrices d'admittances et d'impédances du réseau

Considérons l'équation des branches (5.25), définie par la super matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$ . Notons  $V_{\mathcal{E}}$  et  $I_{\mathcal{E}}$  respectivement le vecteur des tensions et des courants

1. La matrice  $S_{\mathcal{E}}$  est calculée avec un logiciel spécialisé pour le calcul symbolique.

aux noeuds tels que :  $\forall m \in \{1, \dots, \#N(\mathcal{G})\}$ , leurs composantes  $(V_{\mathcal{E}})_m$  et  $(I_{\mathcal{E}})_m$  sont définis par :

$$(V_{\mathcal{E}})_m(\omega) = V_{m,0}(\omega) , \quad (I_{\mathcal{E}})_m(\omega) = I_{m,0}(\omega) \quad (6.12)$$

Considérons la matrice de connectivité  $C_{N.I} = [C_{I.N_{l,(m,n)}}]$ , de taille  $\#N(\mathcal{G}) \times (2 \times \#B(\mathcal{G}))$ , dont ces éléments  $C_{I.N_{(m,n),l}}$  valent 1 si le noeud  $N_l$  est l'origine du courant  $I_{m,n}$ .

$$C_{N.I_{l,(m,n)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.13)$$

Cette matrice caractérise la connexion des noeuds du réseau et les courants  $I_{m,n}$  propageant dans les branches du réseau. Dans le cas du réseau de la Figure 6.1, la matrice  $C_{N.I}$  est donnée dans (6.5). En introduisant les indices des courants et des noeuds, nous réécrivons (6.5) comme suite :

$$C_{N.I} = \begin{matrix} & \begin{matrix} I_{1,2} & I_{2,1} & I_{2,3} & I_{3,2} & I_{2,4} & I_{4,2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.14)$$

Les supers-vecteurs  $I_{\mathcal{B}}$  et  $V_{\mathcal{B}}$ , définis dans (5.24), sont reliés respectivement aux vecteurs  $I_{\mathcal{E}}$  et  $V_{\mathcal{E}}$  via la matrice de connectivité  $C_{N.I}$  comme suit :

$$V_{\mathcal{B}}(\omega) = C_{N.I}^T V_{\mathcal{E}}(\omega) , \quad I_{\mathcal{E}}(\omega) = C_{N.I} I_{\mathcal{B}}(\omega) \quad (6.15)$$

En remplaçant le vecteur  $V_{\mathcal{B}}(\omega)$  par  $V_{\mathcal{E}}(\omega)$  dans l'équation des branches (5.25), nous obtenons,

$$I_{\mathcal{B}}(\omega) = Y_{\mathcal{B}}(\omega) C_{N.I}^T V_{\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.16)$$

Par la multiplication avec  $C_{N.I}$  à gauche de l'équation (6.16), nous obtenons l'équation caractéristique des noeuds suivante :

$$I_{\mathcal{E}}(\omega) = C_{N.I} Y_{\mathcal{B}}(\omega) C_{N.I}^T V_{\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.17)$$

dont un exemple a été donné dans l'équation (6.6).

**Définition 18.** Considérons la super-matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$  formée par les matrices d'admittance  $Y_{m-n}$  des branches  $B_{m-n}$ . Nous définissons la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  du réseau  $\mathcal{G}$  par :

$$I_{\mathcal{E}}(\omega) = Y_{\mathcal{E}}(\omega) V_{\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.18)$$

et elle est reliée à la super-matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{B}}$  par la relation suivante :

$$Y_{\mathcal{E}}(\omega) := C_{N.I} Y_{\mathcal{B}}(\omega) C_{N.I}^T \quad (6.19)$$

où la matrice de connectivité  $C_{N.I}$  est définie par (6.13).

**Remarque 35.** Les vecteurs de courants  $I_{\mathcal{E}}$  et de tensions  $V_{\mathcal{E}}$  sont reliés également par la matrice d'impédance  $Z_{\mathcal{E}}$  via l'équation suivante :

$$V_{\mathcal{E}}(\omega) = Z_{\mathcal{E}}(\omega)I_{\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.20)$$

où la matrice  $Z_{\mathcal{E}}$  peut être déduite de la matrice  $Y_{\mathcal{E}}$  telle que :

$$Z_{\mathcal{E}}(\omega) := Y_{\mathcal{E}}^{-1}(\omega) \quad (6.21)$$

Afin d'éliminer le vecteur des courants  $I_{\mathcal{E}}$ , nous utilisons les conditions aux noeuds.

### 6.2.1.2 Par les sources et les impédances connectées aux noeuds

Notons  $V_{s,\mathcal{E}}$ , le vecteur des tensions des sources connectées aux noeuds où ses composantes sont définies par :

$$(V_{s,\mathcal{E}})_m(\omega) := V_{s,m}(\omega) \quad (6.22)$$

En absence de la source locale en un noeud  $N_m$ , la composante  $(V_{s,\mathcal{E}})_m(\omega)$  est nulle. Nous notons également  $Z_{s,\mathcal{E}}$  la matrice diagonale contenant les impédances connectées aux noeuds du réseau. Avec ces nouvelles notations, nous réécrivons les conditions aux noeuds (5.1) sous la forme matricielle suivante :

$$V_{\mathcal{E}}(\omega) + Z_{s,\mathcal{E}}(\omega)I_{\mathcal{E}}(\omega) = V_{s,\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.23)$$

Cette équation relie le vecteur des courants et des tensions aux noeuds via la matrice diagonale  $Z_{s,\mathcal{E}}$  et le vecteur des tensions des sources connectées aux noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$ .

Après avoir défini les équations caractéristiques des noeuds, nous introduisons donc l'équation des tensions définie sur un réseau  $\mathcal{G}$  quelconque.

### 6.2.2 Equation des tensions

Le principe de la formulation de l'équation des tensions est similaire à celle de l'équation de BLT. En effet, l'équation des tensions résulte de la combinaison des équations (6.18) et (6.23).

**Définition 19.** Etant donné un réseau électrique  $\mathcal{G}$  passif dont les noeuds sont connectés à des impédances de charges passives et non nulles. L'équation des tensions définie sur le réseau est donnée par

$$\left(\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}(\omega)Y_{\mathcal{E}}(\omega)\right)V_{\mathcal{E}}(\omega) = V_{s,\mathcal{E}}(\omega) \quad (6.24)$$

L'équation des tensions exprime le vecteur des tensions aux noeuds du réseau en fonction des caractéristiques des branches et des noeuds.

**Remarque 36.** L'équation (6.24) nous permet d'étudier un problème inverse du réseau, mais elle permet aussi de résoudre le problème direct qui consiste à déterminer  $Y_{\mathcal{E}}$  à partir de la topologie du réseau, les paramètres *RLGC* des branches et la configuration (impédance-source) imposée à chaque noeud. Au passage nous établissons le résultat suivant pour le problème direct.

**Proposition 10.** Considérons la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  associées à un réseau  $\mathcal{G}$  où l'impédance connectée à chaque noeud est passive et non nulle. Etant donné un vecteur des tensions des sources  $V_{s,\mathcal{E}}$ , l'équation des tensions admet une unique solution en  $V_{\mathcal{E}}$ .

*Preuve de la proposition 10.* L'équation des tensions admet une unique solution si et seulement si la matrice  $\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}(\omega)Y_{\mathcal{E}}(\omega)$  est inversible.

Sous les hypothèses de la passivité des branches et des impédances connectées aux noeuds, d'après les résultats de [111], la matrice  $Z_{s,\mathcal{E}}(\omega) + Z_{\mathcal{E}}(\omega)$  est inversible. d'où la matrice  $\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}(\omega)Y_{\mathcal{E}}(\omega)$  est inversible.  $\square$

Comme nous avons annoncé dans la section précédente, lors de cette étude nous nous intéressons uniquement à la matrice d'admittance pour son intérêt apportée pour résoudre le problème inverse sur un réseau électrique quelconque. Avant d'entamer l'étude du problème inverse, nous décomposons les matrices d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  en termes des composantes des matrices d'admittance  $Y_{m-n}$  des branches  $B_{m-n}$ .

### 6.2.3 Décomposition des matrices d'admittance

La décomposition de la matrice d'admittance globale dépend de la structure de la de la matrice de connectivité du réseau électrique, de type *noeud-noeud*. Nous notons cette matrice par  $C_{N.N}$ . Elle représente la matrice de connexion des noeuds du réseau et ses éléments  $(C_{N.N})_{m,n}$ , pour  $m, n \in \mathcal{E}$ , sont définis par :

$$(C_{N.N})_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si les noeuds } N_m \text{ et } N_n \text{ partagent la branche } B_{m-n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.25)$$

**Proposition 11.** La matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  d'un réseau  $\mathcal{G}$  se décompose en termes des éléments des matrices d'admittance  $Y_{m-n}$  comme suite :

$$(Y_{\mathcal{E}})_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{C}_m} y_{i:m,m} & \text{si } m = n \\ y_{n:m,n} & \text{si } (C_{N.N})_{m,n} = 1 \\ 0 & \text{si } (C_{N.N})_{m,n} = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

*Preuve de la proposition 11.* Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$ . Nous rappelons que la matrice d'admittance  $Y_{m-n}$  associée à une branche  $B_{m-n}$  vérifie la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} I_{m,n} \\ I_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{m;n,m} & y_{m;n,n} \\ y_{n;m,m} & y_{n;m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m,n} \\ V_{n,m} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Nous rappelons également que le courant  $I_{m,0}$  en un noeud  $N_m$  est donné par :

$$I_{m,0} = \sum_{n \in \mathcal{C}_m} I_{m,n} \quad (6.28)$$

En remplaçant  $I_{m,n}$  dans (6.28) par la première relation de (6.27), nous trouvons :

$$\begin{aligned} I_{m,0} &= \sum_{n \in \mathcal{C}_m} y_{m;n,m} V_{m,n} + y_{m;n,n} V_{n,m} \\ &= V_{m,n} \sum_{n \in \mathcal{C}_m} y_{m;n,m} + \sum_{n \in \mathcal{C}_m} y_{m;n,n} V_{n,m} \end{aligned}$$

En utilisant la matrice de connexion entre les noeuds  $C_{N.N}$ , nous écrivons :

$$\forall m \in \mathcal{E}, I_{m,0} = V_{m,n} \sum_{n \in \mathcal{C}_m} y_{m;n,m} + \sum_{n \in \mathcal{E}} y_{m;n,n} (C_{N.N})_{m,n} V_{n,m} \quad (6.29)$$

Par la continuité des tensions aux noeuds, nous avons,

$$\forall m \in \mathcal{E}, I_{m,0} = V_{m,0} \sum_{n \in \mathcal{C}_m} y_{m;n,m} + \sum_{n \in \mathcal{E}-m} y_{m;n,n} (C_{N.N})_{m,n} V_{0,n} \quad (6.30)$$

Nous déduisons donc que le courant  $I_{m,0}$  est une combinaison linéaire des tensions  $V_{m,0}$  avec  $m \in \mathcal{E}$ . En passant à la forme matricielle, nous retrouvons l'équation des noeuds (6.18) avec,

$$(Y_{\mathcal{E}})_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{C}_m} y_{i:m,m} & \text{si } m = n \\ y_{n:m,n} & \text{si } (C_{N.N})_{m,n} = 1 \\ 0 & \text{si } (C_{N.N})_{m,n} = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

□

L'expression (6.26), nous permet d'obtenir la matrice d'admittance  $Y_{mathcal{E}}$  via les éléments des matrices d'admittance  $Y_{m-n}$ . Inversement, la connaissance de la matrice  $Y_{mathcal{E}}$  nous permet de déduire certains éléments des matrices d'admittance  $Y_{m-n}$ .

### 6.3 Etude du problème inverse via l'équation des tensions

Au chapitre 4, nous avons identifié les longueurs des branches du réseau d'un réseau électrique en étoile ainsi que les facteurs de pertes en utilisant l'admittance au noeud central. Au présent chapitre, nous considérons un réseau quelconque pour identifier, au moins partiellement, les matrices d'admittance des branches  $Y_{m-n}$ , avec  $m-n \in \mathcal{B}$ . Sous certaines hypothèses, nous pouvons identifier complètement les matrices d'admittance des branches. Dans la suite, nous faisons les hypothèses suivantes :



**H 23.** Les impédances  $Z_{s,m}$  connectées aux noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$  sont connues.

**H 24.** Les tensions  $V_{s,m}$  des sources connectées aux noeuds  $N_m$  avec  $m \in \mathcal{E}$  sont connues.

**H 25.** Les tensions  $V_{m,0}$  aux noeuds sont connues par des instruments de mesure.

**Remarque 37.** Dans le contexte de ce chapitre, l'expression "identifier (partiellement) les matrices d'admittance des branches" signifie la détermination (partielle) de ces matrices à partir des expériences faites aux noeuds du réseau.

### 6.3.1 Formulation du problème inverse sur un réseau quelconque

L'étude du problème inverse via l'équation des tensions consiste dans un premier temps à calculer la matrice d'admittance du réseau  $Y_{\mathcal{E}}$  à partir des mesures aux noeuds. Ensuite, nous utilisons sa décomposition pour identifier (partiellement) les matrices d'admittance  $Y_{m-n}$  des branches. En effet, dans un réseau électrique quelconque  $\mathcal{G}$  tel que  $\#B(\mathcal{G}) > 1$ , selon chaque branche  $B_{m-n}$ , nous distinguons les trois cas possibles suivantes :

- $(N_m, N_n) \in \mathcal{E}^*$  : nous pouvons identifier  $y_{n:m,n}$ ,  $y_{m:n,m}$ ,  $\sum_{i \in \mathcal{C}_m} y_{i:m,m}$  et  $\sum_{i \in \mathcal{C}_n} y_{i:n,n}$ .
- $N_m \in \mathcal{E}^*$  et  $N_n \in \mathcal{E}^\circ$  : nous pouvons identifier  $y_{n:m,n}$ ,  $y_{m:n,m}$ ,  $y_{m:n,n}$  et  $\sum_{i \in \mathcal{C}_m} y_{i:m,m}$ .
- $N_m \in \mathcal{E}^\circ$  et  $N_n \in \mathcal{E}^*$  : nous pouvons identifier  $y_{n:m,n}$ ,  $y_{m:n,m}$ ,  $y_{n:m,m}$  et  $\sum_{i \in \mathcal{C}_n} y_{i:n,n}$ .

**Définition 20.** Une ligne de transmission est dite symétrique si, lorsqu'on place une source de tension à l'extrémité gauche et qu'on mesure le courant de court-circuit à l'extrémité droite, nous obtenons le même résultat qu'en branchant la même source à l'extrémité droite et en mesurant le courant de court-circuit à l'extrémité gauche. En terme de la matrice d'admittance  $Y$  introduite dans (2.42), nous avons,

$$y_{l,l} = y_{r,r} \quad (6.32)$$

Elle est dite réciproque si, de plus,  $y_{l,r} = y_{r,l}$ .

**Proposition 12.** Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$ . Sous les hypothèses **H23** et **H24**, les matrices d'admittance des branches  $Y_{m-n}$  sont identifiables.

- complètement si la branche est symétrique et elle délimitée par un noeud terminal.
- partiellement si la branche est délimitée par deux noeuds intermédiaires.

Maintenant, nous allons présenter la technique permettant de déterminer la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  en supposant connaître les tensions aux noeuds du réseau.

### 6.3.2 Détermination de la matrice d'admittance du réseau à partir des expériences aux noeuds

Considérons l'équation des tensions (6.24) associée à un réseau  $\mathcal{G}$ . La connaissance du vecteur des tensions  $V_{s,\mathcal{E}}$  des sources, de la matrice des impédances  $Z_{s,\mathcal{E}}$  et des tensions  $V_{\mathcal{E}}$  dans une configuration donnée n'est pas suffisante pour déterminer la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  car dans (6.24) il y a plus d'inconnus (les éléments de la matrice  $Y_{\mathcal{E}}$ ) que d'équations. Afin de déterminer cette matrice, nous réalisons une série d'expériences dont le nombre dépend de la topologie du réseau  $\mathcal{G}$  et du type d'expériences réalisées. Dans la suite, nous notons  $V_{s,\mathcal{E}}^i$  et  $V_{\mathcal{E}}^i$  respectivement le vecteur des tensions des sources et le vecteur des tensions aux noeuds associées à la  $i^{\text{ème}}$  expérience. Elle sont reliés par l'équation des tensions suivante :

$$\left(\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}(\omega)Y_{\mathcal{E}}(\omega)\right)V_{\mathcal{E}}^i(\omega) = V_{s,\mathcal{E}}^i(\omega) \quad (6.33)$$

**Proposition 13.** *Considérons un réseau électrique  $\mathcal{G}$  avec  $\#N(\mathcal{G})$  noeuds connectés à des impédances passives. Dans une série de  $\#N(\mathcal{G})$  expériences, notons  $[V_{s,\mathcal{E}}^i]$  et  $[V_{\mathcal{E}}^i]$  pour  $i = 1, \dots, \#N(\mathcal{G})$  les séquences des vecteurs de tensions de sources et de tensions aux noeuds. Si le choix des tensions de sources dans les  $\#N(\mathcal{G})$  expériences est tel que la matrice  $[V_{s,\mathcal{E}}^1 \ V_{s,\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{s,\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}]$  est inversible alors la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  est uniquement déterminée par :*

$$Y_{\mathcal{E}} = Z_{s,\mathcal{E}}^{-1} \left( [V_{s,\mathcal{E}}^1 \ V_{s,\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{s,\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}] [V_{\mathcal{E}}^1 \ V_{\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}]^{-1} - \mathbb{I} \right) \quad (6.34)$$

**Preuve de la Proposition 13.** D'après l'équation des tensions (6.33), nous avons,

$$\left(\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}Y_{\mathcal{E}}\right)[V_{\mathcal{E}}^1 \ V_{\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}] = [V_{s,\mathcal{E}}^1 \ V_{s,\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{s,\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}] \quad (6.35)$$

Puisque la matrice  $\mathbb{I} + Z_{s,\mathcal{E}}Y_{\mathcal{E}}$  et la séquence  $[V_{s,\mathcal{E}}^1 \ V_{s,\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{s,\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}]$  sont inversibles alors,  $[V_{\mathcal{E}}^1 \ V_{\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}]$  est aussi inversible. Donc, puisque  $Z_{s,\mathcal{E}}$  est inversible, la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  est uniquement déterminée par :

$$Y_{\mathcal{E}} = Z_{s,\mathcal{E}}^{-1} \left( [V_{s,\mathcal{E}}^1 \ V_{s,\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{s,\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}] [V_{\mathcal{E}}^1 \ V_{\mathcal{E}}^2 \ \dots \ V_{\mathcal{E}}^{\#N(\mathcal{G})}]^{-1} - \mathbb{I} \right) \quad (6.36)$$

□

Dans la Proposition 13, le nombre minimal des expériences  $\#N(\mathcal{G})$  a été utilisé. Nous pouvons choisir un nombre d'expériences  $N$  tel que  $N > \#N(\mathcal{G})$ . D'après le lemme ci-dessous, la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  reste identifiable. Dans ce cas, la redondance, que nous avons ajouté avec plus d'expériences que nécessaires, permettra de réduire les erreurs aléatoires en résolvant (6.33) au sens des moindres carrés.

**Lemme 2.** *Si deux séquences de vecteurs colonnes  $x_i \in \mathbb{C}^m$  et  $y_i \in \mathbb{C}^n$  sont reliés par une matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  de telle sorte que  $y_i = Ax_i$  pour  $i = 1, \dots, N$  avec  $N \geq m$  alors la matrice  $A$  est déterminée uniquement par les deux séquences si la matrice  $[x_1 \ x_1 \ \dots \ x_N]$  est de rang ligne plein.*

2. Elle est inversible d'après la preuve de la proposition 10.

*Démonstration.* Puisque la matrice  $[x_1 \ x_1 \cdots \ x_N]$  est de rang ligne plein, il existe un sous ensemble de  $m$  colonnes linéairement indépendant, qui contient une matrice inversible. Les équations  $y_i = Ax_i$  correspondantes permettent de déterminer uniquement la matrice  $A$ .  $\square$

## 6.4 Simulations numériques du problème inverse

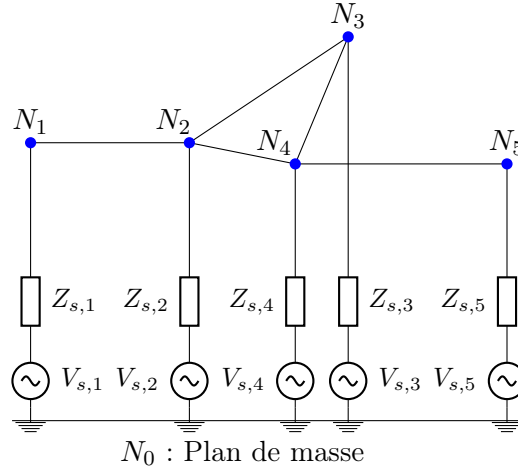
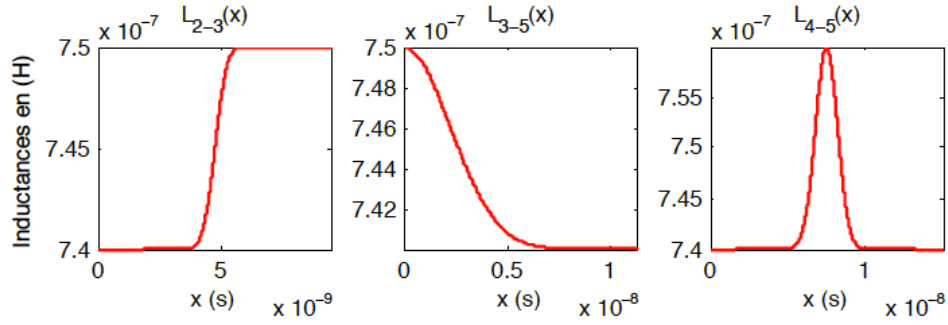


FIGURE 6.3 – Exemple d'un réseau électrique.

Les résultats apportés dans ce chapitre sur l'identification de la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  d'un réseau électrique quelconque sont validés, dans cette section, par des simulations numériques obtenues sur un exemple de réseau électrique. Lors de ces simulations, nous générons les vecteurs de tensions aux noeuds  $V_{\mathcal{E}}$ , correspondant à une telle expérience, à l'aide du simulateur dédié à la résolution de l'équation de BLT non uniforme. En pratique, ces vecteurs sont mesurés aux noeuds du réseaux. Nous allons comparer les éléments des matrices d'admittance identifiés aux éléments des mêmes matrices du simulateur. Nous allons également tester la robustesse de cette méthode d'identification en introduisant des bruits dans les vecteurs de tensions générés aux noeuds.

### 6.4.1 Données de simulations numériques

Considérons le réseau électrique  $\mathcal{G}$  de la Figure 6.3 qui est formé de 5 branches  $B_{m-n}$  avec  $m-n \in \{1-2, 2-3, 2-4, 4-5\}$  et 5 noeuds  $N_m$  avec  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Les paramètres linéiques  $RLGC_{m-n}$  et la longueur  $\ell$  de chaque branche  $B_{m-n}$  sont données dans le Tableau 6.1 en unités de mesures internationales. Les valeurs constantes de l'inductance  $L_{m-n}$  et de la capacité  $C_{m-n}$ , utilisées dans cet exemple, sont celles estimées expérimentalement par S.Alexandersson [6] sur un type de câbles embarqués dans un camion *Volvo*. La Figure 6.4 représente les profils des inductances  $L_{m-n}$  des

FIGURE 6.4 – Profils des inductances  $L_{m-n}$  des branches  $B_{m-n}$  non homogènes

branches  $B_{m-n}$  non uniforme et qui présentent des défauts, non francs, distribués le long de ces branches. Pour identifier la matrice d'admittance, nous supposons que chaque noeud  $N_m$  est connecté à une source de tension réglable<sup>3</sup> afin de faire varier les tensions des sources. nous supposons également que les impédances  $Z_{s,m}$  avec  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  sont identiques et elles valent  $120 \Omega \approx 0.61 \zeta_{m-n}$ .

Lors des différentes simulations, les composantes des vecteurs de tensions des sources

TABLE 6.1 – Caractéristiques des branches du réseau de la Figure 6.3.

Branches	$L_{m-n}$	$R_{m-n}$	$G_{m-n}$	$C_{m-n}$	$l_{m-n}$
$B_{1-2}$	$74 \times 10^{-9}$	$18 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-13}$	$19 \times 10^{-12}$	2
$B_{2-3}$	Fig. 6.4	0	0	$19 \times 10^{-12}$	2.5
$B_{2-4}$	$74 \times 10^{-9}$	0	0	$19 \times 10^{-12}$	1.5
$B_{3-4}$	Fig. 6.4	0	0	$19 \times 10^{-12}$	3
$B_{4-5}$	Fig. 6.4	$55 \times 10^{-2}$	$10^{-7}$	$19 \times 10^{-12}$	4

$V_{\mathcal{E}}^i$ , connectées aux noeuds, sont définies par :

$$(V_{\mathcal{E}}^i)_k = 1 \times \delta_{ik} \text{ (Volt)} \quad \text{avec} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.37)$$

Cette définition signifie que pendant la  $i^{\text{ème}}$  expérience, le réseau électrique  $\mathcal{G}$  est alimenté par une seule source de tension  $V_{s,i}$  qui est connecté au noeud  $N_i$ . Dans ces conditions, nous pouvons identifier la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  du réseau  $\mathcal{G}$ . D'après la structure du réseau  $\mathcal{G}$ , la matrice d'admittance  $Y_{\mathcal{E}}$  s'exprime, en termes

3. On sous-entend par une source de tension réglable, une source de tension dont on peut faire varier la tension lors de chaque expérience.

des éléments des matrices d'admittance des branches  $B_{m-n}$ , comme suit :

$$Y_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} y_{1;2,1} & y_{1;2,2} & 0 & 0 & 0 \\ y_{2;1,1} & y_{2;1,2} + y_{2;3,2} + y_{2;4,2} & y_{2;3,3} & y_{2;4,4} & 0 \\ 0 & y_{3;2,2} & y_{3;2,3} + y_{3;4,3} & y_{3;4,4} & 0 \\ 0 & y_{4;2,2} & y_{4;3,3} & y_{4;2,4} + y_{4;3,4} + y_{4;5,4} & y_{4;5,5} \\ 0 & 0 & 0 & y_{5;4,4} & y_{5;4,5} \end{bmatrix}$$

D'après cette expression, nous pouvons identifier uniquement certains éléments des matrices d'admittance des branches du réseau. En effet, nous identifions trois éléments des matrices d'admittance des branches  $B_{1-2}$  et  $B_{4-5}$  et deux éléments des matrices des autres branches. Nous identifions également des sommes se trouvant dans le diagonale de la matrice  $Y_{\mathcal{E}}$ .

### 6.4.2 Analyse des résultats

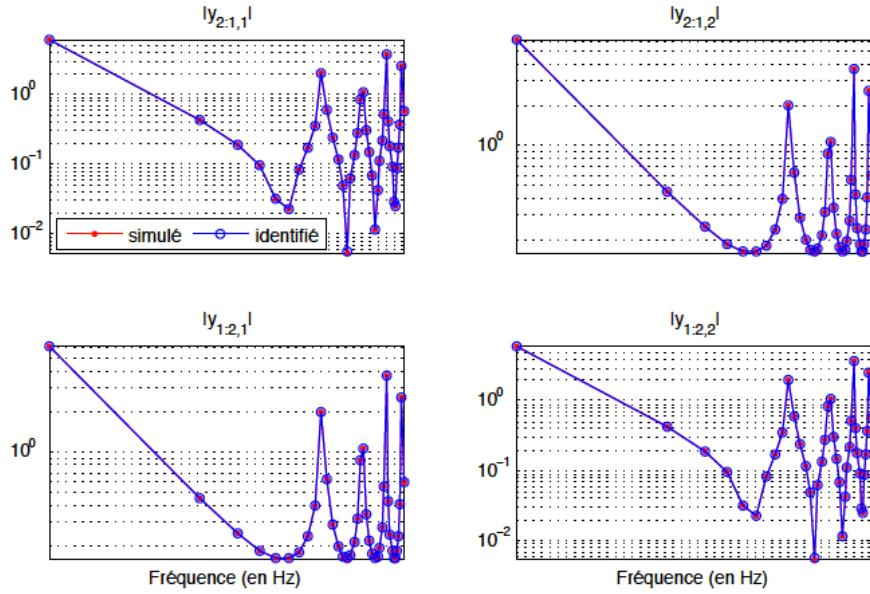


FIGURE 6.5 – Comparaison des modules des éléments de  $Y_{1-2}$  simulés et identifiés

Considérons une ligne de transmission uniforme, avec perte. La résolution explicite des équations de télégraphistes (1.24), nous conduit à l'expression explicite de la matrice d'admittance  $Y$  suivant :

$$Y(\omega) = \begin{bmatrix} \zeta^{-1} \tanh^{-1}(c_0 \gamma(\omega) \ell) & -\zeta^{-1} \sinh^{-1}(c_0 \gamma(\omega) \ell) \\ -\zeta^{-1} \sinh^{-1}(c_0 \gamma(\omega) \ell) & \zeta^{-1} \tanh^{-1}(c_0 \gamma(\omega) \ell) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

où  $\zeta$ ,  $c_0 = \sqrt{1/LC}$ ,  $\gamma$  et  $\ell$  représentent respectivement l'impédance caractéristique, la vitesse, la constante de propagation et la distance électrique de la ligne de transmission. La Figure 6.5 représente la comparaisons des modules, avec des échelles

logarithmiques, des éléments identifiés et simulés, avec la relation (6.38), de la matrice d'admittance  $Y_{1-2}$  associé à la branche homogène  $B_{1-2}$ .

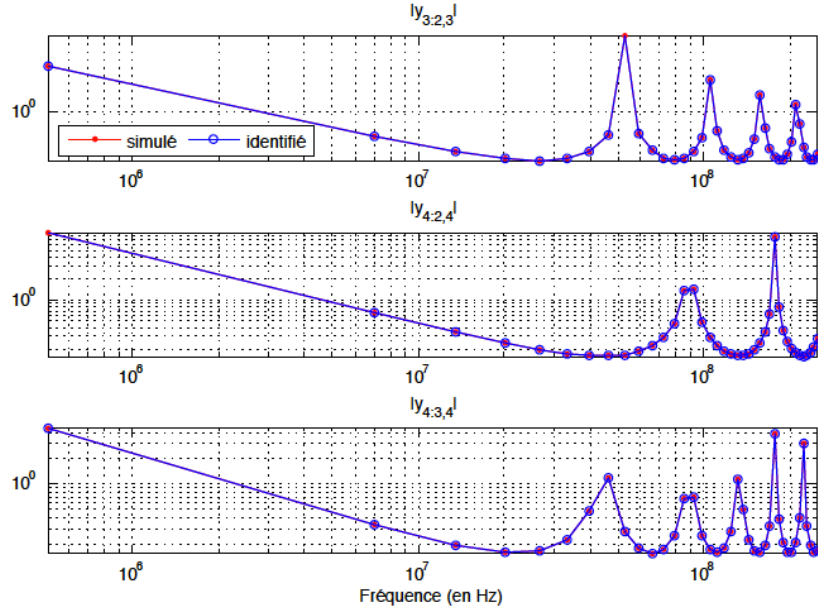


FIGURE 6.6 – Profils des éléments des matrices d'admittance associées aux  $B_{2-3}$  et  $B_{3-4}$ .

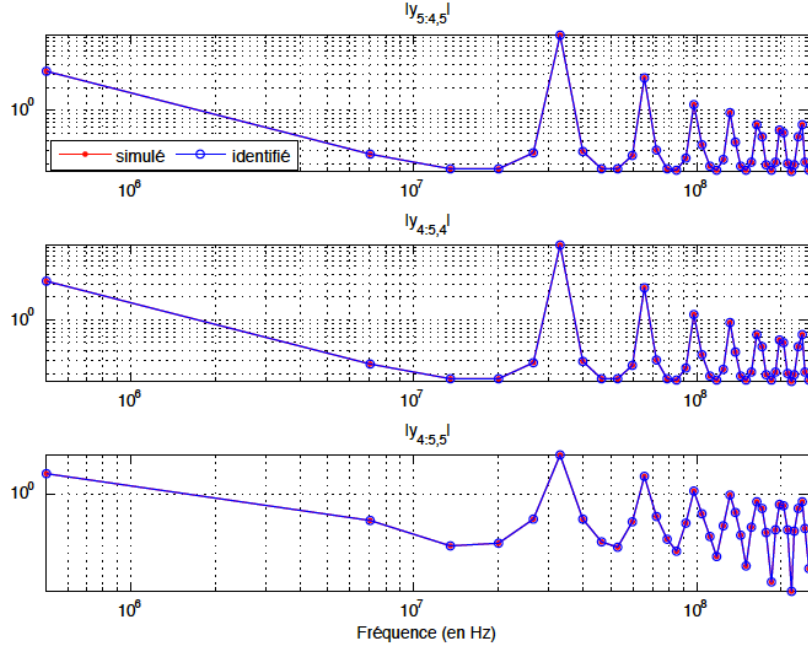
Vue que les branches  $B_{2-3}$ ,  $B_{2-4}$  et  $B_{3-4}$  sont délimitées par deux noeuds intermédiaires, nous ne pouvons que identifier partiellement les matrices  $Y_{m-n}$  pour  $m-n \in \{2-3, 2-4, 3-4\}$ . La Figure 6.6 représente la comparaisons entre les modules, avec des échelles logarithmiques, des éléments  $y_{3,2,3}$ ,  $y_{4,2,4}$  et  $y_{4,3,4}$  identifiés et simulés des matrices  $Y_{m-n}$  pour  $m-n \in \{2-3, 2-4, 3-4\}$ . Les éléments  $y_{2,3,2}$ ,  $y_{2,4,2}$  et  $y_{3,4,3}$  sont également identifiés avec une bonne précision car les erreurs entre les éléments identités et simulés sont pratiquement invisibles sur la figure. Nous avons,

$$\left\| \underbrace{y_{2:3,2}}_{\text{simulé}} - \underbrace{y_{2:3,2}}_{\text{identifié}} \right\|^2 \leq 21 \times 10^{-14} \quad (6.39)$$

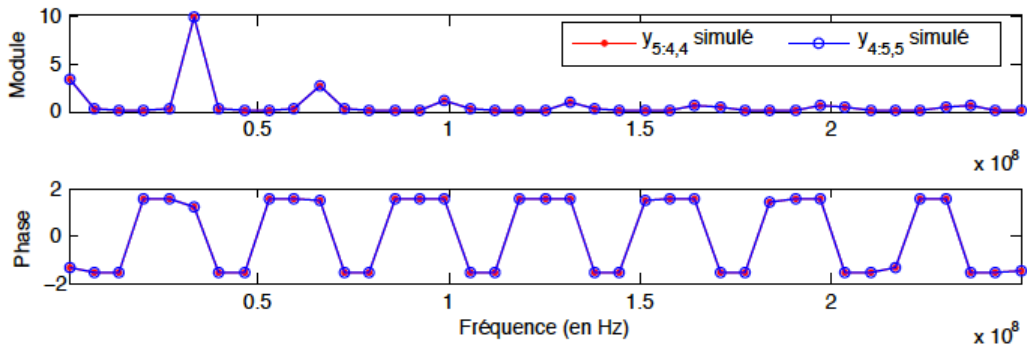
$$\left\| \underbrace{y_{2:4,2}}_{\text{simulé}} - \underbrace{y_{2:4,2}}_{\text{identifié}} \right\|^2 \leq 167 \times 10^{-15} \quad (6.40)$$

$$\left\| \underbrace{y_{3:4,3}}_{\text{simulé}} - \underbrace{y_{3:4,3}}_{\text{identifié}} \right\|^2 \leq 163 \times 10^{-16} \quad (6.41)$$

Dans la Figure 6.7, nous comparons les modules, avec des échelles logarithmiques, des éléments identifiés et simulés de la matrice  $Y_{4-5}$ . Nous remarquons que malgré l'existence des termes de pertes et la non homogénéité de l'inductance  $L_{4-5}$ , la branche  $B_{4-5}$  est réciproque. Cette branche est également symétrique grâce à la symétrie de son inductance le long de la branche. La Figure 6.8, qui représente la comparaison du module et de la phase des éléments simulés de la diagonale de la matrice

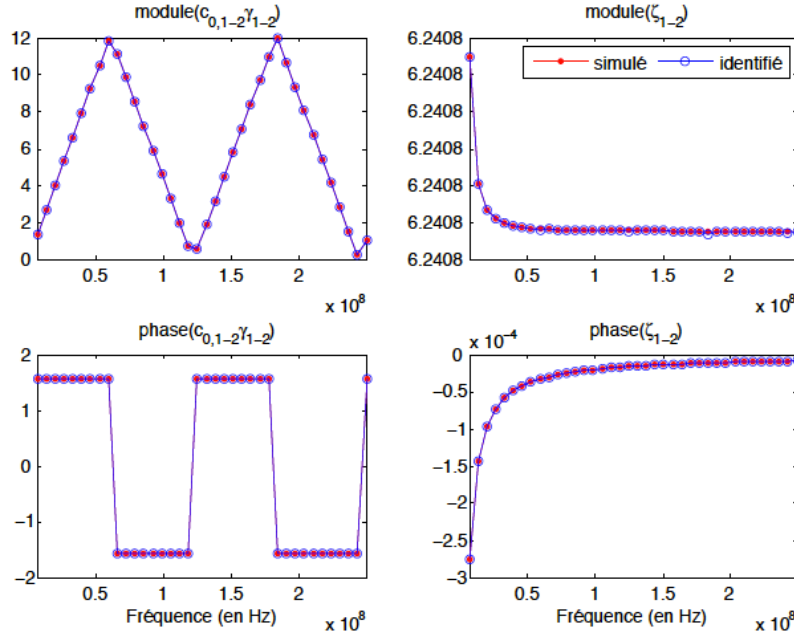
FIGURE 6.7 – Profils des éléments  $y_{n:m,n}$  de la matrice  $Y_{4-5}$ .

$Y_{4-5}$ , confirme cette propriété de la symétrie. D'après la Proposition 12, nous pouvons donc identifier complètement la matrice d'admittance  $Y_{4-5}$  de la branche  $B_{4-5}$ .

FIGURE 6.8 – Comparaison entre les éléments simulés de la diagonale de la matrice  $Y_{4-5}$ 

#### 6.4.2.1 Vers l'identification de certains paramètre des branches.

La connaissance complète de la matrice d'admittance d'une branche nous permet de remonter à certains paramètres de la branche. En effet, dans le cas d'une

FIGURE 6.9 – Profils simulés et identifiés des modules et phase de  $\zeta_{1-2}$  et  $\gamma_{1-2}$ .

branche uniforme  $B_{m-n}$ , en connaissant la longueur de la branche, nous déterminons le coefficient de propagation  $c_{0,m-n}\gamma_{m-n}$  et l'impédance caractéristique  $\zeta_{1-2}$ . Dans le cas non uniforme, nous pouvons appliquer l'homographie entre la matrice d'admittance et la matrice de scattering pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Ensuite, nous pouvons utiliser les algorithmes d'inversion développés pour une ligne de transmission simple pour calculer certaines caractéristiques distribuées de la ligne.

Concernant le présent exemple, d'après la réciprocité et la symétrie des branches  $B_{1-2}$  et  $B_{4-5}$ , nous identifions complètement les matrices d'admittance  $Y_{1-2}$  et  $Y_{4-5}$ . Nous identifions donc l'impédance caractéristique  $\zeta_{1-2}$  et le coefficient de propagation  $c_{0,1-2}\gamma_{1-2}$  via les expressions de (6.38), donnée pour une ligne de transmission homogène, et nous déduisons les paramètres de scattering liés à la branche  $B_{4-5}$ . La Figure 6.9 représente les modules et les phases du coefficient de propagation  $c_{0,1-2}\gamma_{1-2}$  et de l'impédance caractéristique  $\zeta_{1-2}$ . La figure 6.10 représente le module et la phase du coefficient de réflexion de la branche  $B_{4-5}$  au noeud  $N_4$ . Ce coefficient correspond au cas où la charge est adaptée à la branche au noeud  $N_5$ .

Ces résultats de l'identification des éléments des matrices d'admittance des branches du réseau à partir des mesures simulées sans bruit sont en accord pratiquement parfait avec les résultats de simulations numériques. Maintenant, afin d'étudier la robustesse de la méthode aux bruits de mesure, nous allons introduire



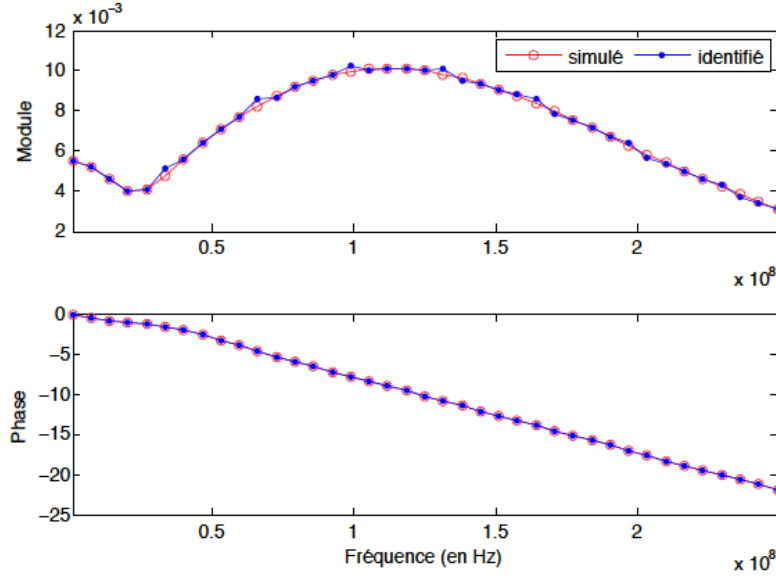


FIGURE 6.10 – Module et phase du coefficient de réflexion associé à la branche  $B_{4-5}$  au noeud  $N_4$ .

des bruits sur les vecteurs de tensions générés aux noeuds à l'aide du simulateur de l'équation de BLT.

### 6.4.3 Robustesse de la méthode d'identification

Pour tester la robustesse de la méthode d'identification de certains éléments des matrices  $Y_{m-n}$ , nous introduisons des bruits dans les vecteurs des tensions générés aux noeuds du réseau. Le bruit, que nous ajoutons, influencera sur la variance du signal (tension au noeud).

Soit  $V_{m,0} = |V_{m,0}|e^{j \arg(V_{m,0})}$ , la tension mesurée en un noeud  $N_m$ . Soit  $n_m$  un bruit blanc gaussien centré de variance unitaire. La tension bruitée au noeud  $N_m$ , notée  $\tilde{V}_{m,0}$  est donnée par :

$$\tilde{V}_{m,0} = \max \left( 0, |V_{m,0}| + n_m \sigma_{|V_{m,0}|} \tau \right) e^{j \left( \arg(V_{m,0}) + n_m \sigma_{\arg(V_{m,0})} \tau \right)} \quad (6.42)$$

où  $\tau$  représente le pourcentage de bruit ajouté et  $\sigma_{arg}$  et  $\sigma_{| \cdot |}$  représentent respectivement l'écart-type de la phase et du module. Afin de visualiser l'effet des bruits, dans la Figure 6.11, nous comparons des modules, avec une échelle logarithmique (uniquement sur les ordonnées), des éléments de la matrice d'admittance  $Y_{4-5}$  simulés et identifiés avec 5% de bruit ( $\tau = 0.05$ ) ajouté dans le module et la phase des vecteurs de tensions générés aux noeuds. Il représente également les phases des mêmes éléments de la matrice  $Y_{4-5}$ . Nous remarquons que pour 5% de bruit, les résultats de l'identification sont encore très proches des résultats obtenus avec la simulation du

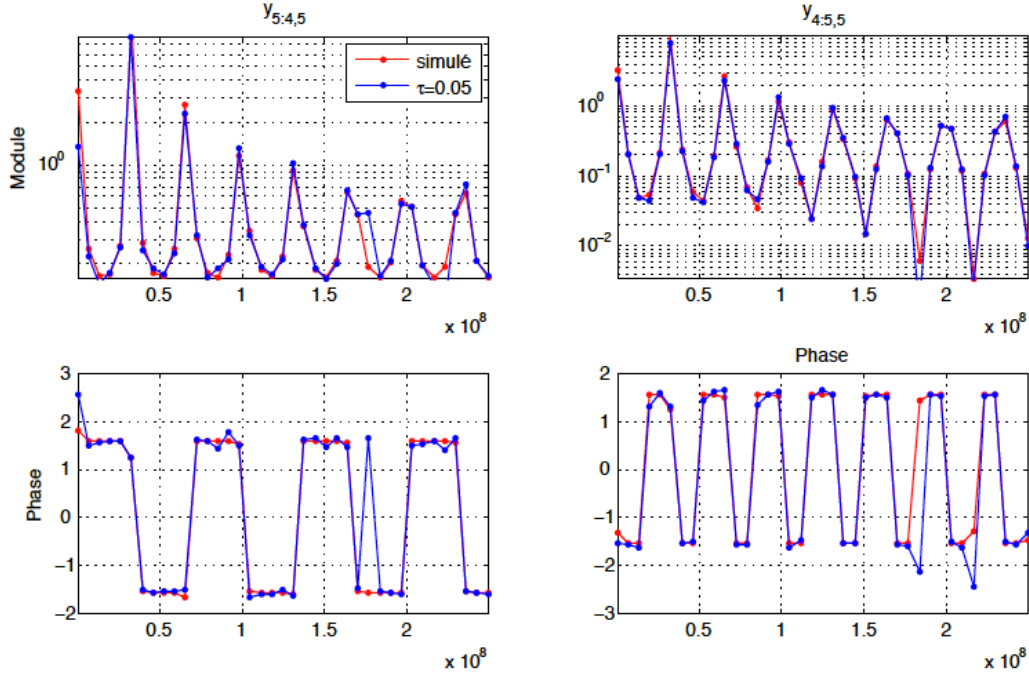


FIGURE 6.11 – Comparaison des modules et phases des éléments de  $Y_{4,5}$  simulés et identifiés avec  $\tau = 0.05$ .

problème direct. Nous remarquons également que le bruit fait perdre la réciprocity et la symétrie des branches du réseau. La Figure 6.12 représente la comparaison du module de l'élément  $y_{3,2,3}$  de la branche  $Y_{2,3}$  obtenu avec de différents pourcentages de bruit  $\tau$ .

## 6.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthodologie de diagnostic pour des réseaux électriques, non uniformes, de topologie quelconque. Nous avons utilisé l'équation des tensions, qui exprime les tensions aux noeuds du réseau en fonction des caractéristiques des branches et des noeuds, afin d'identifier au moins partiellement, la matrice d'admittance de chaque branche du réseau à partir de la matrice d'admittance globale du réseau.

Dans le cas de la détermination totale de la matrice d'admittance d'une branche, nous pouvons calculer son coefficient de réflexion et d'appliquer la méthode de l'inverse scattering développée par les auteurs dans [112, 96] afin de détecter les défauts non francs sur la branche en question.

Cette méthode de diagnostic a été validée par des simulations numériques.

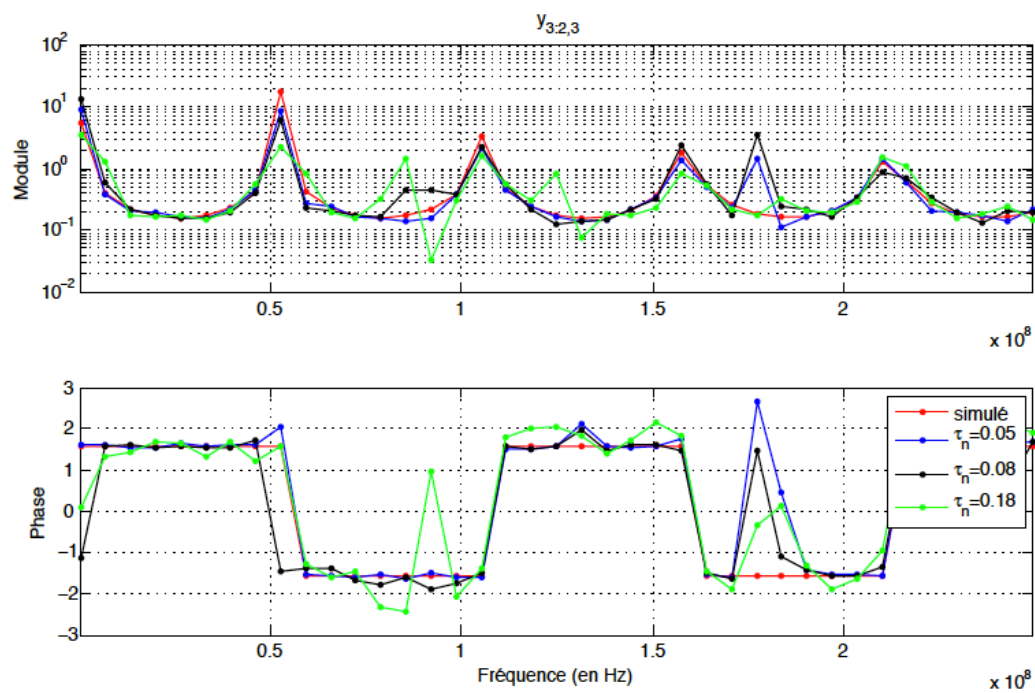


FIGURE 6.12 – Comparaison des modules et phases de l'éléments  $y_{3,2,3}$  simulé et identifiés avec des niveaux de bruit différents.

# Conclusion

Les travaux réalisés durant cette thèse ont permis de développer des méthodes de diagnostic de défauts dans des réseaux électriques filaires complexes, basées sur le principe de la réflectométrie.

Tout d'abord, nous avons positionné les travaux de cette thèse dans leurs contextes applicatif et académique, en présentant le besoin industriel et les différentes méthodes de diagnostic existantes.

Les méthodes de diagnostic existantes montrent une réelle efficacité pour le diagnostic de lignes de transmission isolées et de réseaux électriques simples, le plus souvent pour des défauts francs. En revanche, elles rencontrent des difficultés dans le cas de réseaux complexes qui sont de plus en plus utilisés, notamment pour le diagnostic de défauts non francs. Nous avons donc notamment cherché à développer des méthodes pour le diagnostic de défauts non francs dans des réseaux complexes.

Après des études préliminaires sur la modélisation de réseaux électriques filaires dont résultent des simulateurs numériques de réseaux qui consistent à résoudre des problèmes directs, nous avons étudié deux problèmes inverses pour le diagnostic de défauts dans des réseaux. Le premier vise à estimer, à partir d'un coefficient de réflexion, le nombre, les longueurs et les coefficients de pertes des branches d'un réseau en étoile. Même s'il s'agit de la structure de réseau la plus simple, les méthodes existantes à base de réflectométrie ne permettaient de résoudre ce problème que pour des réseaux en étoile avec peu de branches, en raison de la difficulté liée à la gestion de réflexions multiples. Les simulations numériques montrent que la méthode itérative développée dans cette thèse permet de traiter des réseaux avec plus d'une dizaine de branches, ce qui constitue une avancée importante par rapport aux méthodes existantes. Le deuxième problème inverse étudié porte sur les réseaux de structure topologique générale. Il s'agit de l'estimation, éventuellement partielle, des matrices d'admittance des branches à partir des observations faites aux noeuds d'un réseau. Cette méthode permet de détecter et de localiser des défauts non francs dans des réseaux de structure complexe, y compris les réseaux de structure maillée, contenant des circuits en boucle.

Parmi les perspectives qui peuvent être envisagées à la suite de cette thèse, à plus ou moins longs termes, on envisage les directions suivantes :

- pour le problème inverse des réseaux en étoile,
  - l'estimation de l'admittance au noeud central à partir du coefficient de réflexion observé à l'extrémité terminal de la branche de test,
  - la prise en compte de l'hypothèse que les branches ont les mêmes paramètres caractéristiques linéiques lors de l'estimation des coefficients de pertes,
- pour le problème inverse des réseaux de structure topologique générale,
  - l'extension de la méthode permettant de traiter des noeuds non terminaux

- sans charge connectée (noeuds idéaux),
- la résolution du problème similaire mais avec des observations sur un sous-ensemble des noeuds,
- La validation des méthodes développées par des essais expérimentaux, en collaboration avec un laboratoire qui dispose des équipements nécessaires.
- l'étude du problème inverse qui consiste à estimer les matrices de scattering des branches dans un réseau de structure topologique générale, à partir des observations faites aux noeuds.

Certains de ces travaux sont des extensions directes de ceux présentés dans cette thèse et pourraient être réalisés à court terme, d'autres nécessiteraient des recherches plus conséquentes. En tout cas nous pensons que ces travaux sont prometteurs pour apporter des solutions efficaces au problème de diagnostic de défauts dans des réseaux électriques filaires complexes qui présente un enjeu important dans plusieurs secteurs industriels.

# Annexes

## A Variantes des équations de Zakharov-Shabat

Les transformations des équations des télégraphistes d'une ligne non homogène en espace (1.8) à travers la transformation de Liouville (1.23) et la définition des ondes incidente et rétrograde (1.28) conduisent, sans aucune approximation, aux équations Zakharov-Shabat paramétrées par la pulsation temporelle  $\omega$ . Pour introduire le nombre d'onde  $k$ , nous restreignons au cas d'une ligne de transmission homogène.

Dans ce cas la relation entre  $\omega$  et  $k$  est assez complexe, donc la substitution de  $\omega$  par une expression en  $k$  ne donne pas un résultat qui ressemble aux équations de Zakharov-Shabat vérifiées par  $k$  [48]. Si nous supposons, en plus, que la ligne de transmission est sans dispersion, alors  $\omega = \pm k$ . Sans se restreindre à une ligne homogène, ni au cas d'une ligne sans dispersion, nous pouvons toujours obtenir la forme standard des équations de Zakharov-Shabat paramétrées par  $k$ , en définissant  $\omega := k$ .

### A.1 Transformations des équations des télégraphistes aux équations de ZS

Nous commençons par les équations des Télégraphistes temporelles :

$$\frac{\partial v(t, z)}{\partial z} + L(z) \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} + R(z) i(t, z) = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} + C(z) \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} + G(z) v(t, z) = 0 \quad (\text{A.1b})$$

Nous avons deux manières de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. D'abord par la transformée de Fourier :

$$V(\omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, z) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.2a})$$

$$I(\omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t, z) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.2b})$$

En remplaçant (A.5) dans (A.1), nous obtenons,

$$\frac{dV(\omega, z)}{dz} + j\omega L(z) I(\omega, z) + R(z) I(\omega, z) = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\frac{dI(\omega, z)}{dz} + j\omega C(z) V(\omega, z) + G(z) V(\omega, z) = 0 \quad (\text{A.3b})$$

L'alternatif est de considérer le cas où la ligne est excitée par une source monofréquencielle de pulsation  $\omega$ . En négligeant le transitoire initial,  $v(t, z)$  et  $i(t, z)$  à

chaque point  $z$  donné sont sinusoïdes en temps et s'expriment sous la forme

$$v(t, z) = V(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (\text{A.4a})$$

$$i(t, z) = I(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (\text{A.4b})$$

où la tension  $V(\omega, z)$  et le courant  $I(\omega, z)$  sont des valeurs complexes, car elles contiennent les phases. En reportant (A.4) dans (A.1), on obtient également (A.3).

$$V(\omega, z) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) - \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{A.5a})$$

$$I(\omega, z) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) + \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{A.5b})$$

Avec la transformation de Liouville

$$x(z) = \int_0^z \sqrt{L(s)C(s)} ds \quad (\text{A.6})$$

et en définissant les ondes

$$\nu_1(\omega, x) \triangleq Z_0^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) - Z_0^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{A.7a})$$

$$\nu_2(\omega, x) \triangleq Z_0^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) + Z_0^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{A.7b})$$

avec

$$Z_0(x) \triangleq \sqrt{\frac{L(x)}{C(x)}} \quad (\text{A.8})$$

on arrive aux équations de Zakharov-Shabat vérifiées par la pulsation  $\omega$  :

$$\frac{\partial \nu_1(\omega, x)}{\partial x} - j\omega \nu_1(\omega, x) = q_3(x)\nu_1(\omega, x) - q_+(x)\nu_2(\omega, x) \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial \nu_2(\omega, x)}{\partial x} + j\omega \nu_2(\omega, x) = q_3(x)\nu_2(\omega, x) - q_-(x)\nu_1(\omega, x) \quad (\text{A.9b})$$

**Remarque 38.** *Jusqu'ici, les transformations à partir du modèle de départ (A.1) ont été faites sans aucune approximation, ni hypothèse particulière sur l'homogénéité, les pertes ou encore la dispersion le long de la ligne. Dans ce cadre, nous avons bien la fréquence temporelle  $\omega$  dans (A.9), sans apparition du nombre d'onde  $k$ . Nous allons étudier la relation entre  $\omega$  et  $k$ , mais pour cela nous devons faire de nouvelles hypothèses, notamment l'homogénéité de la ligne en  $x$ .  $\square$*

## A.2 Relation entre la fréquence $\omega$ et nombre d'onde $k$

Pour parler du nombre d'onde, supposons que la ligne est homogène en  $x$ , de sorte que la forme d'onde spatiale est sinusoïde (avec atténuation, sauf le cas sans pertes). Ainsi les paramètres  $R(x), L(x), C(x), G(x)$  deviennent simplement  $R, L, C, G$ .

Après la transformation de Liouville, les équations (A.3) deviennent

$$\frac{dV(\omega, x)}{dx} + Z_0 \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) I(\omega, z) = 0 \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{dI(\omega, x)}{dx} + Z_0^{-1} \left( j\omega + \frac{G}{C} \right) V(\omega, z) = 0. \quad (\text{A.10b})$$

avec

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{A.11})$$

La solution générique de (A.10) est sous la forme

$$V(\omega, x) = A_+(\omega) \exp \left( + \frac{1}{\sqrt{LC}} \gamma(\omega) x \right) + A_-(\omega) \exp \left( - \frac{1}{\sqrt{LC}} \gamma(\omega) x \right) \quad (\text{A.12})$$

où  $A_+(\omega)$ ,  $A_-(\omega)$  sont deux valeurs à déterminer par les conditions de bord (source et charge), et

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (\text{A.13})$$

Posons

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + jk(\omega) \quad (\text{A.14})$$

pour réécrire (A.12) sous la forme

$$V(\omega, x) = A_+(\omega) e^{[\alpha(\omega) + jk(\omega)]x} + A_-(\omega) e^{-[\alpha(\omega) + jk(\omega)]x}. \quad (\text{A.15})$$

Ici  $k(\omega)$  est bien le nombre d'onde.

A partir de (A.13) et (A.14) on obtient

$$(\alpha(\omega) + jk(\omega))^2 = \left( \frac{R}{L} + j\omega \right) \left( \frac{G}{C} + j\omega \right) \quad (\text{A.16})$$

donc

$$\alpha^2(\omega) - k^2(\omega) + 2j\alpha(\omega)k(\omega) = \frac{RG}{LC} - \omega^2 + j\omega \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \quad (\text{A.17})$$

En éliminant  $\alpha$  des deux égalités correspondant aux parties réelles et imaginaires de (A.17), on peut obtenir la relation qui relie  $k$  et  $\omega$ . Mais cette relation est en général assez complexe. On risque donc de détruire la forme (presque) Zakharov-Shabat des équations (A.9) en y remplaçant à tout prix  $\omega$  par une expression en  $k$ .

A noter toute fois une situation particulière : dans le cas d'une ligne (uniforme) sans dispersion où

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad (\text{A.18})$$



l'équation (A.16) conduit à

$$\alpha(\omega) + jk(\omega) = \pm \left( \frac{R}{L} + j\omega \right). \quad (\text{A.19})$$

Dans ce cas on a simplement  $k = \pm\omega$ .

En résumé, pour introduire le nombre d'onde  $k$ , nous nous sommes restreints au cas d'une ligne homogène. Dans ce cas la relation entre  $\omega$  et  $k$  reste complexe, donc la substitution de  $\omega$  par une expression en  $k$  ne donne pas un résultat qui ressemble aux équations de Zakharov-Shabat. Si on suppose, en plus, que la ligne est sans dispersion, alors  $\omega = \pm k$ .

## B Des équations ZS en $\omega$ aux équations ZS en $k$

Pour que les équations (A.9) soient conforme à la forme habituelle des équations de Zakharov-Shabat [48], il faudra inverser les deux signes devant  $j\omega$  dans ces deux équations. L'utilisation de la forme habituelle permet d'appliquer les algorithmes d'inverse scattering dans leurs formes standard.

On pourrait permuter les définitions des deux ondes  $\nu_1, \nu_2$ , mais ceci impliquerait une modification de la définition du coefficient de réflexion, qui aurait son module supérieur ou égal à un, au lieu d'être inférieur.

Une autre solution est de remplacer  $\omega$  par

$$k \triangleq -\omega. \quad (\text{B.1})$$

Cette définition de  $k$  est faite dans le cas général d'une ligne non homogène modélisée par les équations des télégraphistes (A.1). Cette notation ne coïncide avec le nombre d'onde que dans certain cas particulier.

Ainsi on trouve la forme habituelle des équations de Zakharov-Shabat, paramétrées par  $k$  :

$$\frac{\partial \nu_1(k, x)}{\partial x} + jk\nu_1(k, x) = q_3(x)\nu_1(k, x) - q_+(x)\nu_2(k, x) \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{\partial \nu_2(k, x)}{\partial x} - jk\nu_2(k, x) = q_3(x)\nu_2(k, x) - q_-(x)\nu_1(k, x) \quad (\text{B.2b})$$

Puisque la transformée de Fourier (inverse) du coefficient de réflexion est une fonction à valeur réelle, alors

$$r(k) = r(-\omega) = r^*(\omega) \quad (\text{B.3})$$

où "\*" signifie le complexe conjugué.

## C D'autres notations concernées

Pour être consistant avec les notations habituelles de l'impédance caractéristique et de la constante de propagation

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (\text{C.1})$$

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (\text{C.2})$$

avec  $k$  il faut écrire

$$Z_c(k) = \sqrt{\frac{R - jkL}{G - jkC}} \quad (\text{C.3})$$

$$\gamma(k) = \sqrt{(R - jkL)(G - jkC)} \quad (\text{C.4})$$

même si les signes négatifs peuvent paraître étranges. On peut rester avec les écritures en  $\omega$  tant que cela est pertinent.

## D Admittance apparente et coefficient de réflexion d'une ligne uniforme

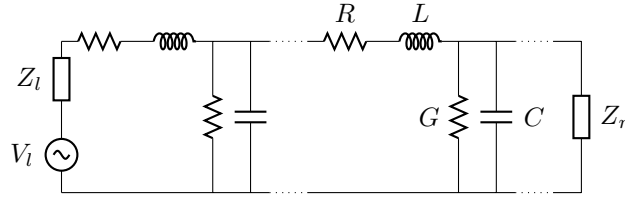


FIGURE 13 – Ligne de transmission connectée à une source de tensions  $V_l$  et deux impédances de charges  $Z_l$  et  $Z_r$ .

Considérons une ligne de transmission uniforme avec perte, de longueur en distance électrique  $l$ , connectée à une source de tension  $V_l$  et à une impédance de charge  $Z_l$  à l'extrémité gauche  $x_l$  et à une impédance de charge  $Z_r$  à l'extrémité droite  $x_r$  comme elle est illustrée dans la Figure 13. La propagation du courant  $I$  et de la tension  $V$  dans une ligne de transmission est décrite par les équations des Télégraphistes dans le domaine fréquentiel suivantes :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V(\omega, x) \\ I(\omega, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{Z}_L(\omega) \\ -\tilde{Y}_T(\omega) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(\omega, x) \\ I(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où l'impédance longitudinale  $\tilde{Z}_L$  et l'admittance transversale  $\tilde{Y}_T$  de la ligne de transmission sont définies par :

$$\tilde{Z}_L(\omega, x) = c_0(R + j\omega L), \quad \tilde{Y}_T(\omega, x) = c_0(G + j\omega C) \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{D.2})$$

En supposant qu'à l'extrémité droite  $x_r$ , nous connaissons la tension et le courant tels que,

$$\begin{bmatrix} V(\omega, x_r) \\ I(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xr}(\omega) \\ I_{xr}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

après un simple calcul (résolution d'une EDO), nous obtenons la solution de l'équation différentielles (D.1) qui s'écrit comme suite :

$$\begin{bmatrix} V(\omega, x) \\ I(\omega, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)) & -\zeta(\omega) \sinh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)) \\ -\zeta^{-1}(\omega) \sinh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)) & \cosh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xr}(\omega) \\ I_{xr}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

où  $\zeta$  et  $\tilde{\gamma}$  représentent respectivement l'impédance caractéristique et la constante de propagation telles que,  $\zeta(\omega) = \sqrt{\tilde{Z}_L(\omega)/\tilde{Y}_T(\omega)}$  et  $\tilde{\gamma}(\omega) = \sqrt{\tilde{Z}_L(\omega)\tilde{Y}_T(\omega)}$ .

### D.1 Admittance apparente

L'admittance  $Y_{ap}$  apparente de la ligne de transmission est définie par,

$$Y_{ap}(\omega, x) = \frac{I(\omega, x)}{V(\omega, x)} \quad (\text{D.5})$$

En utilisant les équations des Télégraphistes (D.1), nous montrons que  $Y_{ap}$  est solution de l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \begin{cases} \frac{dY_{ap}(\omega, x)}{dx} = \tilde{Z}_L(\omega)Y_{ap}^2(\omega, x) - \tilde{Y}_L(\omega) \\ Y_{ap}(\omega, x_r) = Y_r(\omega) \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

où  $Y_r(\omega) = 1/Z_r(\omega) = I_{xr}(\omega)/V_{xr}(\omega)$ .

D'après la définition de  $Y_{ap}$  (D.5) et l'expression du courant et de la tension (D.4), la solution de l'équation différentielle de Riccati D.6 vérifie :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$Y_{ap}(\omega, x) = \frac{\cosh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))I_{xr}(\omega) - \zeta^{-1}(\omega) \sinh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))V_{xr}(\omega)}{\cosh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))V_{xr}(\omega) - \zeta(\omega) \sinh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))I_{xr}(\omega)} \quad (\text{D.7})$$

$$= \frac{Y_r(\omega) - \zeta^{-1}(\omega) \tanh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))}{1 - \zeta(\omega) \tanh(\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r))Y_r(\omega)} \quad (\text{D.8})$$

$$= \zeta^{-1}(\omega) \frac{e^{2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)}(Y_r(\omega) - \zeta^{-1}(\omega)) + (Y_r(\omega) + \zeta^{-1}(\omega))}{e^{2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)}(\zeta^{-1}(\omega) - Y_r(\omega)) + (Y_r(\omega) + \zeta^{-1}(\omega))} \quad (\text{D.9})$$

En posant,

$$\tilde{\rho}_r(\omega) = \frac{Y_c(\omega) - Y_r(\omega)}{Y_c(\omega) + Y_r(\omega)} \quad (\text{D.10})$$

avec  $Y_c(\omega) = \zeta^{-1}(\omega)$  représente l'admittance caractéristique, nous réécrivons l'expression de l'admittance apparente (D.9), la solution de l'équation de Riccati (D.6), comme suite

$$Y_{ap}(\omega, x) = Y_c(\omega) \frac{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)} - \tilde{\rho}_r(\omega)}{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)} + \tilde{\rho}_r(\omega)} \quad (\text{D.11})$$

**Remarque 39.**

– À l'extrémité  $x_l$ , l'admittance apprente  $Y_{ap}$  vérifie,

$$Y_{ap}(\omega, x_l) = Y_c(\omega) \frac{e^{2\tilde{\gamma}(\omega)l} - \rho_r(\omega)}{e^{2\tilde{\gamma}(\omega)l} + \rho_r(\omega)} \quad (\text{D.12})$$

– l'impédance apparente  $Z_{ap}$  de la ligne de transmission uniforme est donnée par :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$Z_{ap}(\omega, x) = \zeta(\omega) \frac{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)} + \rho_r(\omega)}{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)} - \rho_r(\omega)} \quad (\text{D.13})$$

## D.2 Coefficient de réflexion

Considérons les deux ondes de puissance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  définies, en fonction du courant et de la tension, ainsi :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\nu_1(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) - \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{D.14a})$$

$$\nu_2(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x)V(\omega, x) + \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x)I(\omega, x) \quad (\text{D.14b})$$

où  $\zeta_\infty(x) = \sqrt{L(x)/C(x)}$  représente l'impédance caractéristique de la ligne de transmission en haute fréquence.

Considérons la fonction  $r_l$  définie par la relation suivante :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad \nu_1(\omega, x) = r_l(\omega, x)\nu_2(\omega, x) \quad (\text{D.15})$$

Par ailleurs, cette fonction est solution de l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$\begin{cases} \frac{dr_l(\omega, x)}{dx} = q_-(x)r_l^2(\omega, x) + 2(q_d(x) + j\omega)r_l(\omega, x) - q_+(x) \\ r_l(\omega, x_r) = \rho_r(\omega) \text{ avec } \rho_r(\omega) = \frac{Z_r(\omega) - \zeta_\infty(x_r)}{Z_r(\omega) + \zeta_\infty(x_r)} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

où les potentiels  $q_\pm$  et  $q_d$  sont donnés par :

$$q_\pm(x) = \frac{1}{2} \frac{d\zeta_\infty(x)}{dx} \zeta_\infty^{-1}(x) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} - \frac{G(x)}{C(x)} \right), \quad q_d(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{R(x)}{L(x)} + \frac{G(x)}{C(x)} \right) \quad (\text{D.17})$$

**Remarque 40.** La solution de l'équation différentielle de Riccati (D.16) à l'extrémité  $x_l$  représente le coefficient de réflexion à gauche de la ligne de transmission.

D'après la définition des ondes de puissance (D.14), la définition de l'admittance apparente (D.5) et la définition de la fonction  $r_l$  (D.15), nous définissons la fonction  $r_l$  ainsi :

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad r_l(\omega, x) = \frac{Y_\infty(x) - Y_{ap}(\omega, x)}{Y_\infty(x) + Y_{ap}(\omega, x)} \quad (\text{D.18})$$

où  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,  $Y_\infty(x) = \zeta_\infty^{-1}(x)$  représente l'admittance apparente en haute fréquence.

Pour une ligne de transmission uniforme, afin de déterminer l'expression de la fonction  $r_l$  pour tout  $x$  dans  $[x_l, x_r]$ , nous remplaçons l'expression de l'admittance (D.11) dans la relation (D.18). Nous obtenons,  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\begin{aligned} r_l(\omega, x) &= \frac{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)}(Y_\infty(x) - Y_c(\omega, x)) + \tilde{\rho}_r(\omega)(Y_\infty(x) + Y_c(\omega, x))}{e^{-2\tilde{\gamma}(\omega)(x-x_r)}(Y_\infty(x) + Y_c(\omega, x)) + \tilde{\rho}_r(\omega)(Y_\infty(x) - Y_c(\omega, x))} \\ &= \frac{T_1(\omega, x)\rho_r(\omega) - T_2(\omega, x)}{T_2(\omega, x)\rho_r(\omega) + T_3(\omega, x)} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

avec,

$$T_1(\omega, x) = \tilde{\gamma}^{-1}(\omega)(q_d + j\omega) + \tanh^{-1}(\tilde{\gamma}(\omega)(x - x_r)) \quad (\text{D.20})$$

$$T_2(\omega, x) = \tilde{\gamma}^{-1}(\omega)q_+ \quad (\text{D.21})$$

$$T_3(\omega, x) = -\tilde{\gamma}(\omega)(q_d + j\omega) + \tanh^{-1}(\tilde{\gamma}(\omega)(x - x_r)) \quad (\text{D.22})$$

**Remarque 41.** L'expression D.19 est la solution de l'équation différentielle de Riccati dans le cas d'une ligne de transmission uniforme.

## E Comportement asymptotique du coefficient de réflexion en haute fréquence

Dans cette annexe, nous allons démontrer la Proposition 2.

**Proposition 2.** *Considérons une ligne de transmission modélisée par le système de ZS (2) et les conditions aux bords suivantes :*

$$\begin{cases} \nu_1(\omega, x_r) - \rho_r(\omega)\nu_2(\omega, x_r) = 0 \\ \nu_2(\omega, x_l) - \rho_l(\omega)\nu_1(\omega, x_l) = (1 - \rho_l(\omega))\nu_{2l}(\omega) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

sous les hypothèses ci-dessous,

**H 26.** *L'extrémité droite de la ligne de transmission est connectée à une charge adaptée à la ligne.*

**H 27.** *Les potentiels  $q_d$  et  $q_{\pm}$  sont continûment différentiable en  $x$  dans l'intervalle  $[x_l, x_r]$ .*

le comportement asymptotique du coefficient de réflexion à gauche satisfait :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_l(\omega) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Nous rappelons que le coefficient de réflexion à gauche est définie par :

$$r_l(\omega) = \frac{\nu_1(\omega, x_l)}{\nu_2(\omega, x_l)} \quad (\text{E.3})$$

où  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont solution de l'équations de ZS (1.30).

**Preuve de la Proposition 2.** Considérons le système de ZS (1.30) avec les conditions aux bords (E.1). Nous posons,

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad \tilde{\nu}_1(\omega, x) = e^{-\int_{x_r}^x q_d(s)ds} \nu_1(\omega, x), \quad \tilde{\nu}_2(\omega, x) = e^{\int_{x_r}^x q_d(s)ds} \nu_2(\omega, x) \quad (\text{E.4})$$

Le nouveau système différentiel vérifié par  $\tilde{\nu}_1$  et  $\tilde{\nu}_2$  est le suivant :  $x \in [x_l, x_r]$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\nu}_1(\omega, x)}{dx} = j\omega\tilde{\nu}_1(\omega, x) - Q_+(x)\tilde{\nu}_2(\omega, x) \\ \frac{d\tilde{\nu}_2(\omega, x)}{dx} = -j\omega\tilde{\nu}_2(\omega, x) - Q_-(x)\tilde{\nu}_1(\omega, x) \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

où,

$$\forall x \in [x_l, x_r], \quad Q_+(x) = e^{-2\int_{x_r}^x q_d(s)ds} q_+(x), \quad Q_-(x) = e^{2\int_{x_r}^x q_d(s)ds} q_-(x) \quad (\text{E.6})$$

En supposant que les variables  $\tilde{\nu}_1$  et  $\tilde{\nu}_2$  sont initialisées à l'extrémité  $x_r$  de la ligne, nous écrivons la forme intégrale du système différentiel (E.5) (formule de Duhamel) comme suite :  $\forall x \in [x_l, x_r]$

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1(\omega, x) &= e^{j\omega(x-x_r)}\tilde{\nu}_1(\omega, x_r) - \int_{x_r}^x Q_+(s)\tilde{\nu}_2(\omega, s)e^{j\omega(x-s)}ds \\ \tilde{\nu}_2(\omega, x) &= e^{-j\omega(x-x_r)}\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - \int_{x_r}^x Q_-(s)\tilde{\nu}_1(\omega, s)e^{-j\omega(x-s)}ds \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

En intégrant par partie l'intégrale  $\int_{x_r}^x Q_+(s)\tilde{\nu}_2(\omega, s)e^{j\omega(x-s)}ds$ , nous obtenons,

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^x Q_+(s)\tilde{\nu}_2(\omega, s)e^{j\omega(x-s)}ds &= \frac{1}{j\omega} \left( Q_+(x_r)\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - Q_+(x)\tilde{\nu}_2(\omega, x)e^{j\omega(x-x_r)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{j\omega} \int_{x_r}^x \frac{d(Q_+(s)\nu_2(\omega, s))}{ds} e^{j\omega(x-s)}ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^x \frac{d(Q_+(s)\nu_2(\omega, s))}{ds} e^{j\omega(x-s)}ds &= \frac{1}{j\omega} \left( \int_{x_r}^x \frac{d^2(Q_+(s)\nu_2(\omega, s))}{ds^2} e^{j\omega(x-s)}ds \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{d(Q_+(s)\nu_2(\omega, s))}{ds} e^{j\omega(x-s)} \right]_{s=x_r}^{s=x} \right) \end{aligned}$$

donc, sous l'hypothèse **H27**, en haute fréquence, nous avons l'approche suivante,

$$\int_{x_r}^x Q_+(s)\tilde{\nu}_2(\omega, s)e^{j\omega(x-s)}ds = \frac{1}{j\omega} \left( Q_+(x_r)\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - Q_+(x)\tilde{\nu}_2(\omega, x)e^{j\omega(x-x_r)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

avec  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0$ .

En utilisant le même principe de calcul sur l'intégrale  $\int_{x_r}^x Q_-(s)\tilde{\nu}_1(\omega, s)e^{-j\omega(x-s)}ds$ , nous écrivons les approximations des variables  $\tilde{\nu}_1$  et  $\tilde{\nu}_2$  définies dans (E.7), en haute fréquence (quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ), comme suites :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1(\omega, x) &= e^{j\omega(x-x_r)}\tilde{\nu}_1(\omega, x_r) - \frac{1}{j\omega} \left( Q_+(x_r)\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - Q_+(x)\tilde{\nu}_2(\omega, x)e^{j\omega(x-x_r)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ \tilde{\nu}_2(\omega, x) &= e^{-j\omega(x-x_r)}\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) + \frac{1}{j\omega} \left( Q_-(x_r)\tilde{\nu}_1(\omega, x_r) - Q_-(x)\tilde{\nu}_1(\omega, x)e^{-j\omega(x-x_r)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse **H26** et la définition de  $\tilde{\nu}_1$  en fonction de  $\nu_1$ , nous avons également  $\tilde{\nu}_1(\omega, x_r) = 0$ . Les expressions de  $\tilde{\nu}_1$  et  $\tilde{\nu}_2$  introduites précédemment deviennent :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1(\omega, x) &= -\frac{1}{j\omega} \left( Q_+(x_r)\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - Q_+(x)\tilde{\nu}_2(\omega, x)e^{j\omega(x-x_r)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ \tilde{\nu}_2(\omega, x) &= e^{-j\omega(x-x_r)}\tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - \frac{1}{j\omega} Q_-(x)\tilde{\nu}_1(\omega, x)e^{-j\omega(x-x_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \end{aligned}$$

D'après la définition du coefficient de réflexion à gauche (E.3) et des variables  $\tilde{\nu}_1$  et  $\tilde{\nu}_2$ , nous avons,

$$\begin{aligned} r_l(\omega) &= \frac{\tilde{\nu}_1(\omega, x_l)}{\tilde{\nu}_2(\omega, x_l)} e^{2 \int_{x_l}^{x_r} q_d(s) ds} \\ &= \frac{-\frac{1}{j\omega} \left( Q_+(x_r) \tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - Q_+(x_l) \tilde{\nu}_2(\omega, x_l) e^{-j\omega l} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)}{e^{j\omega l} \tilde{\nu}_2(\omega, x_r) - \frac{1}{j\omega} Q_-(x_l) \tilde{\nu}_1(\omega, x_l) e^{j\omega l} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)} e^{2 \int_{x_l}^{x_r} q_d(s) ds} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

En passant à la limite, nous obtenons,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} r_l(\omega) = 0 \quad (\text{E.9})$$

□

## F EDOs vérifiées par les coefficients de la matrice de Scattering

Considérons une ligne de transmission non uniforme avec pertes. Nous supposons qu'elle est éclairée par des ondes électromagnétiques qui sont traduites par des sources de tension  $V^s$  et de courant  $I^s$  distribuées le long de la ligne. La propagation des ondes de puissance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont décrite par le système des équations de Zakharov-Shabat suivant :

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x) \end{bmatrix}}_{w(\omega, x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_d(x) + j\omega & -q_+(x) \\ -q_-(x) & -(q_d(x) + j\omega) \end{bmatrix}}_{A(\omega, x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x) \end{bmatrix}}_{w(\omega, x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_0(x) \nu_1^s(\omega, x) \\ c_0(x) \nu_2^s(\omega, x) \end{bmatrix}}_{w^s(\omega, x)} \quad (\text{F.1})$$

Nous rappelons que les ondes de sources  $\nu_2^s$  et  $\nu_1^s$  sont définies ainsi :

$$\nu_1^s(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) V^s(\omega, x) - \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x) I^s(\omega, x) \quad (\text{F.2})$$

$$\nu_2^s(\omega, x) = \zeta_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) V^s(\omega, x) + \zeta_\infty^{\frac{1}{2}}(x) I^s(\omega, x) \quad (\text{F.3})$$

La matrice de scattering  $S$  et le vecteur  $\iota_{l:r}$  associé à la ligne sont définis ainsi :

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x_l) \\ \nu_2(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega) & s_{l,r}(\omega) \\ s_{r,l}(\omega) & s_{r,r}(\omega) \end{bmatrix}}_{S(\omega)} \begin{bmatrix} \nu_2(\omega, x_l) \\ \nu_1(\omega, x_r) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega) \\ \iota_{r;l}(\omega) \end{bmatrix}}_{\iota_{l:r}} \quad (\text{F.4})$$

Dans la présente annexe, nous montrons que les éléments de la matrice de scattering et les composantes du vecteur  $\iota_{l:r}$  sont solutions des équations différentielles.



**Proposition 3** *Considérons les équation différentielles suivantes :  $\forall x \in [x_l, x_r[$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{l,l}(\omega, x)}{dx} = q_-(x)s_{l,l}^2(\omega, x) + 2(j\omega + q_d(x))s_{l,l}(\omega, x) - q_+(x) \\ \frac{ds_{l,r}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))s_{l,r}(\omega, x) \\ \frac{ds_{r,l}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))s_{r,l}(\omega, x) \\ \frac{ds_{r,r}(\omega, x)}{dx} = -q_-(x)s_{r,l}(\omega, x)s_{l,r}(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{l;r}(\omega, x)}{dx} = (j\omega + q_d(x) + q_-(x)s_{l,l}(\omega, x))(\iota_{l;r}(\omega, x) - \iota_{r;l}(\omega, x)s_{l,l}(\omega, x)) \\ \quad - c_0(x)\nu_2^s(\omega, x)s_{l,l}(\omega, x) + c_0(x)\nu_1^s(\omega, x) \\ \frac{d\iota_{r;l}(\omega, x)}{dx} = s_{r,l}(\omega, x)(-q_-(x)s_{l,l}(\omega, x)\iota_{r;l}(\omega, x) + q_-(x)\iota_{l;r}(\omega, x) \\ \quad - c_0(x)\nu_2^s(\omega, x)) \end{array} \right. \quad (\text{F.5})$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$s_{l,l}(\omega, x_r) = s_{r,r}(\omega, x_r) = 0 ; s_{l,r}(\omega, x_r) = s_{r,l}(\omega, x_r) = 1 ; \iota_{l;r}(\omega, x_r) = \iota_{r;l}(\omega, x_r) = 0$$

Les éléments de la matrice de scattering  $S$  et du vecteur  $\iota_{l;r}$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega) & s_{l,r}(\omega) \\ s_{r,l}(\omega) & s_{r,r}(\omega) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega, x_l) & s_{l,r}(\omega, x_l) \\ s_{r,l}(\omega, x_l) & s_{r,r}(\omega, x_l) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega) \\ \iota_{r;l}(\omega) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega, x_l) \\ \iota_{r;l}(\omega, x_l) \end{bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

**Preuve de la Proposition 3** . Afin d'établir les équations différentielles (F.5) et de montrer que les éléments de la matrice de scattering  $S$  et les composantes du vecteur  $\iota_{l;r}$  sont solutions de ces équations différentielles, nous allons utiliser la matrice de transitions d'état associée au système différentiel (F.1).

Considérons la matrice de transition d'état, notée  $\Phi(x, x')$ , associée à la matrice  $A$ . Pour tout  $x$  et  $x'$  dans l'intervalle  $[x_l, x_r]$ , la matrice de transition d'état  $\Phi(x, x')$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x} = A(\omega, x)\Phi(x, x') \quad (\text{F.7})$$

$$\Phi(x, x) = \Phi(x', x') = \mathbf{I} \quad (\text{F.8})$$

où  $\mathbf{I}$  représente la matrice identité.

**Remarque 42.** Nous pourrions calculer la matrice  $\Phi(x, x')$  numériquement le système différentiel (F.7)-(F.8) pour tout  $x$  et  $x'$  dans l'intervalle  $[x_l, x_r]$ .

Dans cette démonstration, nous supposons que la matrice de transition d'état  $\Phi$  est connue ou déjà calculée. La forme intégrale du système différentiel (F.1) est donnée comme suit :

$$w(\omega, x) = \Phi(x, x_r)w(\omega, x_r) + \eta(x, x_r) \quad (\text{F.9})$$

où la forme intégrale  $\eta$  est définie par :

$$\eta(x, x_r) := \int_{x_r}^x \Phi(x, s) w^s(\omega, s) ds \quad (\text{F.10})$$

et elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \eta(x, x_r)}{\partial x} = A(\omega, x) \eta(x, x_r) + w^s(\omega, x) \quad (\text{F.11})$$

$$\eta(x, x) = \eta(x_r, x_r) = \mathbf{0} \quad (\text{F.12})$$

Dans la suite, nous posons,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.13})$$

Avec ces nouvelles notations, nous réécrivons la relation (F.9) ainsi :

$$\begin{cases} \nu_1(\omega, x) = \Phi_{1,1}(x, x_r) \nu_1(\omega, x_r) + \Phi_{1,2}(x, x_r) \nu_2(\omega, x_r) + \eta_1(x, x_r) \\ \nu_2(\omega, x) = \Phi_{2,1}(x, x_r) \nu_1(\omega, x_r) + \Phi_{2,2}(x, x_r) \nu_2(\omega, x_r) + \eta_2(x, x_r) \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

Après une simple transformation, nous obtenons l'équivalence, du système (F.14), suivante :

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\omega, x) \\ \nu_2(\omega, x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega, x) & s_{l,r}(\omega, x) \\ s_{r,l}(\omega, x) & s_{r,r}(\omega, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2(\omega, x) \\ \nu_1(\omega, x_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega, x) \\ \iota_{r;l}(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (\text{F.15})$$

où :  $\forall x \in [x_l, x_r]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{l,l}(\omega, x) = \frac{\Phi_{1,2}(\omega, x)}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \\ s_{l,r}(\omega, x) = \Phi_{1,1}(\omega, x) - \frac{\Phi_{1,2}(\omega, x) \Phi_{2,1}(\omega, x)}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \\ s_{r,l}(\omega, x) = \frac{1}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \\ s_{r,r}(\omega, x) = -\frac{\Phi_{2,1}(\omega, x)}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \\ \iota_{l;r}(\omega, x) = \eta_1(\omega, x) - \frac{\Phi_{1,2}(\omega, x) \eta_2(\omega, x)}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \\ \iota_{r;l}(\omega, x) = -\frac{\eta_2(\omega, x)}{\Phi_{2,2}(\omega, x)} \end{array} \right. \quad (\text{F.16})$$

En utilisant les systèmes des équations différentielles (F.7)-(F.11), nous montrons que les éléments  $s_{l,l}$ ,  $s_{l,r}$ ,  $s_{r,l}$ ,  $s_{r,r}$ ,  $\iota_{l;r}$  et  $\iota_{r;l}$ , définis par (F.16), sont solutions des équations différentielles (F.5) avec les conditions à l'extrémité  $x_r$  (F.6). D'après la définition de la matrice de scattering  $S$  et le vecteur  $\iota_{l,r}$  (F.4) et la relation (F.15), nous nous avons,

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} s_{l,l}(\omega, x_l) & s_{l,r}(\omega, x_l) \\ s_{r,l}(\omega, x_l) & s_{r,r}(\omega, x_l) \end{bmatrix}, \quad \iota(\omega) = \begin{bmatrix} \iota_{l;r}(\omega, x_l) \\ \iota_{r;l}(\omega, x_l) \end{bmatrix} \quad (\text{F.17})$$

□



# Bibliographie

- [1] L. Abboud, A. Cozza, and L. Pichon. Utilization of matched pulses to improve fault detection in wire networks. In *Intelligent Transport Systems Telecommunications, (ITST), 2009 9th International Conference on*, pages 543–548, 2009. (Cité en page 31.)
- [2] Layane Abboud, Andrea Cozza, and Lionel Pichon. A Matched-Pulse Approach for Soft-Fault Detection in Complex Wire Networks. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(6) :1719–1732, January 2012. (Cité en page 31.)
- [3] Agilent Technologies. *Agilent AN154 S-Parameter Design*, 2000. Application Note. (Cité en page 17.)
- [4] A.N. Akansu and R.A. Haddad. *Multiresolution Signal Decomposition : Transforms, Subbands, and Wavelets*. Telecommunications Series. Academic Press, 2001. (Cité en page 29.)
- [5] Tuncay Aktosun, Martin Klaus, and Cornelis van der Mee. Factorization of scattering matrices due to partitioning of potentials in one-dimensional schrödinger-type equations. *J. MATH. PHYS*, 37 :5897–5915, 1996. (Cité en page 51.)
- [6] Sabine Alexandersson. *Automotive Electromagnetic Compatibility - Prediction and Analysis of Parasitic Components in Conductor Layouts*. PhD thesis, Lund university, Faculty of Engineering, 2008. (Cité en page 130.)
- [7] F. Auzanneau, M. Olivas, and N. Ravot. A simple and accurate model for wire diagnosis using reflectometry. In *PIERS Proceedings*, August 2007. (Cité en page 31.)
- [8] Fabrice Auzanneau, Marc Olivas, and Nicolas Ravot. A Simple and Accurate Model for Wire Diagnosis Using Reflectometry. In *PIERS Proceedings*, pages 232–236, Prague, Czech Republic, August 2007. (Cité en pages xiv, 1, 30 et 69.)
- [9] M. Basseville and I. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes – Theory and Applications*. Information and System Sciences Serie. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1993. (Cité en pages 33 et 34.)
- [10] M. Basseville and I.V. Nikiforov. *Detection of abrupt changes : theory and application*. Prentice Hall, 1993. (Cité en page 33.)
- [11] Carl E. Baum. Generalization of the "BLT" equation. *Interaction Note*, 511 :131–136, 1995. (Cité en page 35.)
- [12] Carl E. Baum. Scattering matrices for nonuniform multiconductor transmission lines. *Interaction Notes*, 596, November 2005. (Cité en page 35.)

- [13] Carl E. Baum, Tom K. Liu, and Fred M. Tesche. On the analysis of general multiconductor transmission line networks. *Interaction Notes*, 350, November 1978. (Cité en pages [xxi](#), [35](#), [39](#), [97](#), [98](#), [100](#) et [104](#).)
- [14] R. Bellman, J. Bentsman, and S.M. Meerkov. Invariant imbedding and the reduction of two point boundary value problems to initial value problems. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 46(12) :1646–1649, 1960. (Cité en pages [41](#) et [51](#).)
- [15] R. Bellman and Wing G.M. *An introduction to invariant imbedding*. Society for Industrial Mathematics, 1992. (Cité en page [41](#).)
- [16] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and J. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer, 2003. (Cité en page [33](#).)
- [17] G. Bloch, M. Ouladsine, and P. Thomas. On-line fault diagnosis of dynamic systems via robust parameter estimation. *Control Engineering Practice*, 3(12) :1709–1717, 1995. (Cité en page [34](#).)
- [18] Maha Bouattour, Mohammed Chadli, Mohamed Chaabane, and Ahmed El Hajjaji. Design of robust fault detection observer for takagi-sugeno models using the descriptor approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 9(5) :973–979, 2011. (Cité en page [34](#).)
- [19] C. Buccella, M. Feliziani, and G. Manzi. Identification and localization of defects in shielded cables by a numerical/experimental procedure. In *Electromagnetic Compatibility, 2003 IEEE International Symposium on*, volume 1, pages 213–218 vol.1, 2003. (Cité en page [29](#).)
- [20] C. Buccella, M. Feliziani, and G. Manzi. Accurate detection of low entity cable faults by wavelet transform. In *Electromagnetic Compatibility, 2004. EMC 2004. 2004 International Symposium on*, volume 3, pages 936–941 vol.3, 2004. (Cité en page [29](#).)
- [21] D. Cassereau and M. Fink. Time-reversal of ultrasonic fields. iii. theory of the closed time-reversal cavity. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :579–592, 1992. (Cité en page [30](#).)
- [22] Sofiane Chabane, Philippe Besnier, and Marco Klingler. Extension of the transmission line theory application with modified enhanced per-unit-length parameters. *Progress In Electromagnetics Research M*, 32, 2013. (Cité en page [39](#).)
- [23] V. Chandola, A. Banerjee, and V. Kumar. Anomaly detection : a survey. *ACM Computing Surveys*, 41(3) :1–58, 2009. (Cité en page [34](#).)
- [24] J. Chen, R. J. Patton, and H. Y. Zhang. Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *Int. J of Control*, 63(1) :85–105, 1996. (Cité en page [33](#).)
- [25] Jie Chen and R. J. Patton. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Kluwer, Boston, USA, 1999. (Cité en page [33](#).)
- [26] E. Y. Chow and A. S. Willsky. Analitical redundancy and the design of robust detection systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 29(7) :603–614, 1984. (Cité en page [33](#).)

- [27] You Chung Chung, Nirmal N. Amarnath, and Cynthia M. Furse. Capacitance and inductance sensor circuits for detecting the lengths of open- and short-circuited wires. *IEEE T. Instrumentation and Measurement*, 58(8) :2495–2502, 2009. (Cité en page 10.)
- [28] You Chung Chung, C. Furse, and J. Pruitt. Application of phase detection frequency domain reflectometry for locating faults in an f-18 flight control harness. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 47(2) :327–334, 2005. (Cité en page 13.)
- [29] C.E. Cook and M. Bernfeld. *Radar signals : an introduction to theory and application*. Electrical science series. Academic Press, 1967. (Cité en page 12.)
- [30] P. Crapse, Jingjiang Wang, Yong-June Shin, R. Dougal, Trang Mai, J. Molnar, and Lan Tran. Design of optimized reference signal for joint time-frequency domain reflectometry-based wiring diagnostics. In *AUTOTESTCON, 2008 IEEE*, pages 195–201, 2008. (Cité en page 29.)
- [31] L. Crittenden and G. Slenski. Managing Electrical Connections Systems and Wire Integrity on Legacy Aerospace Vehicles. In *IFAA PI/Engineer Workshop*, 2001. (Cité en pages xiii, 8 et 9.)
- [32] Michel Crouzeix and Alain L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1989. (Cité en page 41.)
- [33] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. (Cité en page 29.)
- [34] Percy Deift and Eugene Trubowitz. Inverse scattering on the line. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32(2) :121–251, 1979. (Cité en page 22.)
- [35] S. X. Ding. *Model-Based Fault Diagnosis Techniques - Design Schemes Algorithms and tools*. Springer-Verlag, 2008. (Cité en page 33.)
- [36] Wiktor Eckhaus and Aart van Harten. *The inverse scattering transformation and the theory of solitons : an introduction*. Elsevier, 1981. (Cité en page 30.)
- [37] L. El Sahmarany, L. Berry, K. Kerroum, F. Auzanneau, and P. Bonnet. Time-reversal for wiring diagnosis. *Electronics Letters*, 48(21) :1343–1344, 2012. (Cité en page 30.)
- [38] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :555–566, 1992. (Cité en pages 30 et 31.)
- [39] M Franchet, N Ravot, and O Picon. Analysis of multiconductor transmission line’s sensitivity to damage : Two complementary approaches. In *9th International Symposium on EMC and 20th International Wroclaw Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2010. (Cité en page 1.)
- [40] M. Franchet, N. Ravot, and O. Picon. The use of the pseudo wigner ville transform for detecting soft defects in electric cables. In *Advanced Intelligent*

- Mechatronics (AIM)*, 2011 IEEE/ASME International Conference on, pages 309–314, 2011. (Cité en page 1.)
- [41] Dean A Frickey. Conversions between s, z, y, h, abcd, and t parameters which are valid for complex source and load impedances. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 42(2) :205–211, 1994. (Cité en page 48.)
  - [42] C. Furse, Y.C. Chung, and R. Dangol. Frequency domain reflectometry for on board testing of aging aircraft wiring. *IEEE Trans. EMC*, 45(2), 2003. (Cité en page 11.)
  - [43] J. J. Gertler. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker, New York, USA, 1998. (Cité en page 33.)
  - [44] J. J. Gertler and R. Monajemy. Generating directional residuals with dynamic parity relations. *Automatica*, 31(4) :627–635, 1995. (Cité en page 33.)
  - [45] L.A. Griffiths, R. Parakh, C. Furse, and B. Baker. The invisible fray : a critical analysis of the use of reflectometry for fray location. *Sensors Journal, IEEE*, 6(3) :697–706, 2006. (Cité en pages 1 et 28.)
  - [46] R. Isermann. Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing - tutorial paper. *Automatica*, 29(4) :815–836, 1993. (Cité en page 34.)
  - [47] R. Isermann. *Fault-Diagnosis System*. Springer, Berlin, 2006. (Cité en page 33.)
  - [48] M. Jaulent. The inverse scattering problem for LCRG transmission lines. *Journal of Mathematical Physics*, 23(12) :2286–2290, December 1982. (Cité en pages 20, 23, 30, 141 et 144.)
  - [49] K. Jones and al. Adaptive method and apparatus for transmission line analysis. *U.S. Patent 20 020 169 585*, mar 2002. (Cité en page 12.)
  - [50] N. Kamdor and C. Furse. An inexpensive distance measuring system for location of robotic vehicles. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1999. IEEE*, volume 3, pages 1498–1501 vol.3, 1999. (Cité en page 13.)
  - [51] J. Korbicz. *Fault Diagnosis : Models, Artificial Intelligence, Applications*. Springer-Verlag GmbH, 2004. (Cité en page 33.)
  - [52] J.S. Kuzniar and G.A. Slenski. *Wire Integrity Field Survey of USAF Legacy Aircraft*. Defense Technical Information Center, 2003. (Cité en pages xiii, 7 et 8.)
  - [53] Adrien Lelong. *Méthodes de diagnostic filaire embarqué pour des réseaux complexes*. [s.n.], [S.l.], 2010. Thèse de doctorat électronique Lille 1 - 2010. (Cité en page 12.)
  - [54] G Lerosey, J De Rosny, A Tourin, A Derode, G Montaldo, and M Fink. Time reversal of electromagnetic waves. *Physical review letters*, 92(19) :193904, 2004. (Cité en page 30.)

- [55] Wei Liu, Robert Hunsperger, Michael Chajes, and Eric Kunz. An overview of corrosion damage detection in steel bridge strands using tdr. In *Proc., 2nd Int. Symp. on TDR for Innovative Applications*. Northwestern University Evanston, Ill., 2001. (Cité en page 11.)
- [56] Lennart Ljung, Thomas Kailath, and Benjamin Friedlander. Scattering theory and linear least squares estimation—part i : Continuous-time problems. *Proceedings of the IEEE*, 64 :131 – 139, january 1976. (Cité en page 51.)
- [57] Florent Loete, Qinghua Zhang, and Michel Sorine. Inverse Scattering Experiments for Electric Cable Soft Fault Diagnosis and Connector Location. In *PIERS Proceedings*, pages 1932–1936, Kuala Lumpur, Malaisie, 2012. (Cité en page 30.)
- [58] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(7) :674–693, 1989. (Cité en page 29.)
- [59] P. J. Medelius and H. J. Simson. Non-intrusive impedance-based cable tester. *U.S. Patent 5 977 773*, Nov 1999. (Cité en page 13.)
- [60] Jean-Gabriel Minonzio. *Décomposition de l’Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l’imagerie et à la caractérisation ultrasonore*. These, Université Paris-Diderot - Paris VII, December 2006. version mise à jour août 2010. (Cité en page 31.)
- [61] F. Monsef, A. Cozza, and L. Abboud. Effectiveness of time-reversal technique for uwb wireless communications in standard indoor environments. In *ICECom, 2010 Conference Proceedings*, pages 1–4, 2010. (Cité en page 31.)
- [62] Mathieu Neyrat, Christophe Guiffaut, Alain Reineix, and François Reynaud. Fast modeling using fdtd method and wave front inverse method for multisensor gpr simulations in the time domain. *Microwave and Optical Technology Letters*, 51(3) :796–802, 2009. (Cité en page 30.)
- [63] J. P. Nieto, L. Garza-Castañón, and A. Rabhi. Fault detection and diagnosis of a vehicle combining an autoassociative neural network and anfis. In *The 7th IFAC International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS’09*, pages 1079–1084, Barcelona, Spain, June 30 - July 3 2009. (Cité en page 34.)
- [64] Jürgen Nitsch. Exact analytical solution for nonuniform multiconducteur transmission lines with the aide of the solution of a corresponding matrix riccati equation. *Interaction Notes*, 534, October 1997. (Cité en page 39.)
- [65] M. Olivas-Carrion. *Communications sur le réseau d’énergie électrique d’un véhicule : modélisation et analyse du canal de propagation*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 2006. (Cité en pages xiii et 24.)
- [66] Mohamed Oumri, Qinghua Zhang, and Michel Sorine. A reduced model of reflectometry for wired electric networks. In *Proceedings of the 19th Interna-*



- tional Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – MTNS 2010*, pages 2213–2218, Budapest, Hungary, July 2010. (Cité en page 116.)
- [67] Mohamed Oumri, Qinghua Zhang, and Michel Sorine. Numerical Solution of BLT Equation for Inhomogeneous Transmission Line Networks. In *PIERS Proceedings*, pages 656–660, Kuala Lumpur, Malaisie, March 2012. (Cité en page 116.)
  - [68] Kevin M O’Connor and Charles H Dowding. Real time monitoring of infrastructure using tdr technology : Principles. In *Proceedings of The First International Conference on the Application of Geophysical Methodologies & NDT to Transportation Facilities and Infrastructure*, 2000. (Cité en page 11.)
  - [69] Jean-Philippe Parmantier. An efficient technique to calculate ideal junction scattering parameters in multiconductor transmission line networks. *Interaction Notes*, 536, February 1998. (Cité en pages 36, 97, 108 et 111.)
  - [70] R.J. Patton, C.J. Lopez-Toribio, and F.J. Uppal. Artificial intelligence approaches to fault diagnosis for dynamic systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 9(3) :471–518, 1999. (Cité en page 34.)
  - [71] Clayton R. Paul. *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Wiley-IEEE Press, 2nd edition, 2007. (Cité en pages 14, 15, 39 et 97.)
  - [72] G. Pinson. *Physique appliquée : en contrôle industriel et r gulation automatique*. G. Pinson, 2003. (Cité en pages xiii et 20.)
  - [73] V. Puig. Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches : Application to real case studies. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 20(4) :619–635, 2010. (Cité en pages 33 et 34.)
  - [74] Yujian Qin, Peiguo Liu, and Jianguo He. A novel hybrid method for solving the response of non-uniform transmission line network. In *PIERS Proceedings*, pages 1306 – 1310, Xian, China, March 2010. (Cité en page 35.)
  - [75] Nicolas Ravot. *Analyse et diagnostic de réseaux filaires complexes par réflectométrie*. PhD thesis, Universit  Paris-Sud XI, France, 2007. (Cité en pages xiii, 11, 12, 13 et 31.)
  - [76] R. Razzaghi, G. Lugrin, H.M. Manesh, C. Romero, M. Paolone, and F. Rachidi. An efficient method based on the electromagnetic time reversal to locate faults in power networks. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 28(3) :1663–1673, 2013. (Cité en page 31.)
  - [77] Raymond Redheffer. Difference equations in transmission-line theory. *Modern Mathematics for the Engineer*,, pages 282–337, 1961. (Cité en page 51.)
  - [78] Sandrine Roblot, A. Zeddami, and A. Reineix. On eliminating crosstalk in a multiconductor telecommunication cable. In *Electromagnetic Compatibility, 2007. EMC 2007. IEEE International Symposium on*, pages 1–6, July 2007. (Cité en page 39.)

- [79] G. B. Rybicki and P. D. Usher. The Generalized Riccati Transformation as a Simple Alternative to Invariant Imbedding. *Astrophysical Journal*, 146 :871, December 1966. (Cité en page 42.)
- [80] M. Saif and Y. Guan. A new approach to robust fault detection and identification. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(3) :685–695, 1993. (Cité en page 33.)
- [81] SA Schelkunoff. Conversion of maxwell’s equations into generalized telegraphist’s equations. *Bell Syst. Tech. J*, 34(5) :995–1043, 1955. (Cité en page 15.)
- [82] J. Schonfeld, O. Greulich, A. Patterson-Hine, L. Lee, J. Cockrell, and L. Holfand. Wire integrity research (wire) pilot study. Technical Report A0SP-0001-XB1, NASA, 2000. (Cité en page 9.)
- [83] Y.J. Shin. *Theory and Application of Time-frequency Analysis to Transient Phenomena in Electric Power and Other Physical Systems*. University of Texas at Austin, 2004. (Cité en page 29.)
- [84] Yong-June Shin, J.B. Park, E. Powers, and E.R. Collins. Joint time-frequency domain reflectometry for diagnostics of coaxial cables. *8th Joint NASA/FAA/DoD Conference on Aging Aircraft*, 2005. (Cité en pages xiii et 29.)
- [85] Yong-June Shin, E.J. Powers, Tok-Son Choe, Chan-Young Hong, Eun-Seok Song, Jong-Gwan Yook, and Jin-Bae Park. Application of time-frequency domain reflectometry for detection and localization of a fault on a coaxial cable. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 54(6) :2493–2500, 2005. (Cité en page 29.)
- [86] S. I. Siddiqui, V. P. Drnevich, and R. J. Deschamps. Time domain reflectometry development for use in geotechnical engineering. *ASTM geotechnical testing journal*, 23(1) :9–20, 2000. eng. (Cité en page 11.)
- [87] S. Simani, C. Fantuzzi, R. Patton, and R.J. Patton. *Model-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques*. Springer, 2003. (Cité en page 33.)
- [88] George A Slenski and Michael F Walz. Novel technologies for improving wire system integrity. In *Ninth Aging Aircraft Conference*, Atlanta,USA, March 2006. (Cité en pages xiii et 6.)
- [89] M Smail, T Hacib, and L Pichon. . . . Detection and location of defects in wiring networks using time domain reflectometry and neural networks. . . . *Field Computation (CEFC)*, 5 :1502–1505, 2011. (Cité en pages 11 et 32.)
- [90] M.K Smail. *Développement d’une méthodologie dédiée à la réflectométrie en vue du diagnostic filaire*. PhD thesis, Université Paris Sud 11-Orsay, 2010. (Cité en pages xiii et 32.)
- [91] M.K Smail, L Pichon, M Olivas, F Auzanneau, and M Lambert. Detection of defects in wiring networks using time domain reflectometry. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(8) :2998–3001, 2010. (Cité en page 11.)

- [92] Mostafa Kamel Smail, Lionel Pichon, Marc Olivas, Fabrice Auzanneau, and Marc Lambert. Detection of Defects in Wiring Networks Using Time Domain Reflectometry. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8) :2998–3001, July 2010. (Cité en pages 1 et 69.)
- [93] Mostafa Kamel Smail, Lionel Pichon, Marc Olivas, Fabrice Auzanneau, and Marc Lambert. Reconstruction of faulty wiring networks using reflectometry response and genetic algorithms. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 35(1) :39–55, January 2011. (Cité en pages 1, 11 et 32.)
- [94] P. Smith, C. Furse, and J. Gunther. Analysis of spread spectrum time domain reflectometry for wire fault location. *Sensors Journal, IEEE*, 5(6) :1469–1478, 2005. (Cité en page 12.)
- [95] D.R. Stevens, G.E. Ott, W.C. Pomeroy, and J.R. Tudor. Frequency-modulated fault locator for power lines. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-91(5) :1760–1768, 1972. (Cité en page 12.)
- [96] Huaibin Tang and Qinghua Zhang. An inverse scattering approach to soft fault diagnosis in lossy electric transmission lines. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 59(10) :3730–3737, 2011. (Cité en pages xiii, 1, 22, 30, 31 et 137.)
- [97] V. Taylor and M. Faulkner. Line monitoring and fault location using spread spectrum on power line carrier. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, 143(5) :427–434, 1996. (Cité en page 12.)
- [98] Peijung Tsai, Chet Lo, You Chung Chung, and Cynthia Furse. Mixed-signal reflectometer for location of faults on aging wiring. *IEEE Sensors Journal*, 5(2) :1479–82, 2005. (Cité en page 12.)
- [99] Fawwaz T. Ulaby. *Fundamentals of applied electromagnetics*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1997. (Cité en page 13.)
- [100] A. Vander Vorst. *Transmission, propagation et rayonnement*. Bibliothèque des Universités. De Boeck Supérieur, 1995. (Cité en page 74.)
- [101] F. Visco Comandini. *Some inverse scattering problems on star-shaped graphs : application to fault detection on electrical transmission line networks*. PhD thesis, Versailles, 2011. (Cité en pages 32, 36, 41, 42, 70, 72 et 91.)
- [102] F. Visco Comandini, M. Mirrahimi, and M. Sorine. On the inverse scattering of star-shape LC-networks. In *47th IEEE CDC*, pages 2075–2080, Cancun, Mexico, December, 9-11 2008. (Cité en page 32.)
- [103] B. Waddoups, C. Furse, C. Furse, and M. Schmidt. Analysis of reflectometry for detection of chafed aircraft wiring insulation. *5th Joint NASA/FAA/DoD Conference on Aging Aircraft, Orlando, Florida*, 2001. (Cité en page 28.)
- [104] Brent Waddoups. *Analysis of reflectometry for detection of chafed aircraft wiring insulation*. PhD thesis, Utah State University, 2001. (Cité en pages 1 et 28.)

- [105] J. Wang, P. E C Stone, Y. J Shin, and R.A. Dougal. Application of joint time-frequency domain reflectometry for electric power cable diagnostics. *Signal Processing, IET*, 4(4) :395–405, 2010. (Cité en page 30.)
- [106] Jingjiang Wang, P. Crapse, Yong-June Shin, and R. Dougal. Diagnostics and prognostics of electric cables in ship power systems via joint time-frequency domain reflectometry. In *Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, 2008. IMTC 2008. IEEE*, pages 917–921, 2008. (Cité en page 30.)
- [107] R.J. Woodward. *Using Frequency Domain Reflectometry for Water Level Measurement*. Utah State University, Department of Electrical and Computer Engineering, 2000. (Cité en page 1.)
- [108] F. Wu, Jean-Louis Thomas, and M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. il. experimental results. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :567–578, 1992. (Cité en page 30.)
- [109] Aiping Xu and Qinghua Zhang. Nonlinear system fault diagnosis based on adaptive estimation. *Automatica*, 40(7) :1181–1193, 2004. (Cité en page 34.)
- [110] Aiping Xu and Qinghua Zhang. Residual generation for fault diagnosis in linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(5) :767–772, 2004. (Cité en page 34.)
- [111] D Youla, L Castriota, and H Carlin. Bounded real scattering matrices and the foundations of linear passive network theory. *Circuit Theory, IRE Transactions on*, 6(1) :102–124, 1959. (Cité en page 126.)
- [112] Qinghua Zhang, M. Sorine, and M. Admane. Inverse scattering for soft fault diagnosis in electric transmission lines. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 59(1) :141–148, 2011. (Cité en pages 1, 11, 30 et 137.)
- [113] A. Zolghadri. An algorithm for real-time failure detection in Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(10) :1537–1539, 1996. (Cité en page 33.)